1 CHANCEN UND RISKEN - RECHNEN MIT WAHRSCHEINLICHKEITEN

Beispiel 1.2: Formelauswertung mit Excel

Der Diversitätsindex *C* nach Simpson ist definiert als die Wahrscheinlichkeit, dass zwei aus einer Artengemeinschaft zufällig ausgewählte Individuen zur selben Art gehören. Man bestimme *C* für eine Artengemeinschaft aus den zwei Arten S1 und S2 mit $n_1 = 50$ bzw. $n_2 = 100$ Individuen.

Gegeben: Häufigkeit von Species 1 = 50
Häufigkeit von Species 2 = 100
Summe n = 150

Berechnung: $C = [n_1 (n_1-1) + n_2 (n_2-1)]/[n(n-1)] =$ 0,553

Beispiel 1.3: Planung der Anzahl von Versuchswiederholungen

Wie oft muss ein (symmetrischer) Würfel ausgespielt werden, damit die Serie der Ergebnisse mit einer Sicherheit (d.h. Wahrscheinlichkeit) von mindestens 95% einen "Sechser" enthält?

Präzisierung: Es sei kSn das Ereignis, dass beim n-maligen Ausspielen eines (fairen) Würfels insgesamt kein Sechser gewürfelt wird. Die Wahrscheinlichkeit, beim 1-maligen Ausspielen keinen Sechser zu würfeln, ist P(kS1) = 5/6; die Wahrscheinlichkeit, beim 2-maligen Ausspielen keinen Sechser zu würfeln, ist $P(kS2) = (5/6)^2$ (Voraussetzung: keine Abhängigkeit zwischen den Würfelvorgängen) usw. Allgemein gilt: $P(kSn) = (5/6)^n$. Die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses 1Sn von kSn (wenigstens einmal beim n-maligen Ausspielen einen Sechser würfeln) ist $P(1Sn) = 1- P(kSn) = 1 - (5/6)^n$.

Gesucht: Anzahl n der Versuchswiederholungen (Würfeln) = Lösung der Gleichung $f(n) = 1 - (5/6)^n >= 0,95$

Berechnung: durch systematisches Probieren, d.h. Erzeugung einer Wertetabelle für n=1,2, ...

n	f(n)	
1	0,1667	
2	0,3056	
3	0,4213	
4	0,5177	
5	0,5981	
6	0,6651	
7	0,7209	
8	0,7674	
9	0,8062	
10	0,8385	
11	0,8654	
12	0,8878	
13	0,9065	
14	0,9221	
15	0,9351	
16	0,9459	
17	0,9549	>= 0,95 !
18	0,9624	

Ergebnis: Man muss 17 Wiederholungen planen, um mit zumindest 96%iger Sicherheit in der Versuchsreihe wenigstens einen Secher zu haben!

Beispiel 1.5: Gesamtirrtumsrisiko

Bei der Bearbeitung eines Problems sind zwei Entscheidungen zu treffen, von denen jede einzelne mit der Wahrscheinlichkeit α = 0.05 eine Fehlentscheidung sein kann. Man bestimme die simultane Irrtumswahrscheinlichkeit α_g, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine der Entscheidungen oder beide falsch sind.

Präzisierung: F_1 und F_2 bezeichen die Ereignisse, dass die erste bzw. zweite Entscheidung falsch ist. $P(F_1)$ = $P(F_2)$ = α = 0,05. Wenn R_1 und R_2 die Ereignisse bezeichnen, dass die erste bzw. zweite Entscheidung richtig ist, gilt $P(R_1) = P(R_2) = 1 - \alpha$. Die Ereignisse R_1 und R_2 sind voneinander unabhängig.

Gesucht: $P(F_1$ oder $F_2)$

Berechnung: α = 0,05

$P(F_1$ oder $F_2) = 1 - P(R_1$ und $R_2) = 1 - P(R_1)\,P(R_2) = 1 - (1 - \alpha)^2$ = 0,0975

Ergebnis: Hat man zwei mit jeweils 5%igem Irrtumsrisiko behaftete Entscheidungen zu treffen, ist die Wahrscheinlichkeit 9,75%, wenigstens in einem Fall falsch zu entscheiden.

Beispiel 1.7: Vorhersagewert (A posteriori Wahrscheinlichkeit)

Wenn eine Person das HIV-Virus in sich hat, beträgt die Wahrscheinlichkeit 99,9%, dass der Test (ELISA) bei ihr positiv ausfällt. Wenn die Person nicht infiziert ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit 99,99%, dass der Test bei ihr negativ ausfällt. Man berechne für Männer, die keiner Risikogruppe angehören (von diesen sind 0,01% mit HIV-infiziert) den positiven prädiktiven Wert, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass bei positivem Testergebnis tatsächlich eine HIV-Infektion vorliegt?

Präzisierung: Es bezeichnen HIV+ (HIV-) die Ereignisse, dass die Erkrankung vorliegt (nicht vorliegt), und T+ (T-) die Wahrscheinlichkeit, dass der Test positiv (negativ) ausfällt.

Sensitivität = P(T+ | HIV+) = 0,999
Spezifität = P(T- | HIV-) = 0,9999
Prävalenz = P(HIV+) = 0,0001

Gesucht: P(HIV+ | T+)

Berechnung: mittels Übergang zu absoluten Häufigkeiten;
Anzahl der Personen in der Zielgruppe = 1.000.000

			1.000.000			
	HIV+				HIV-	
	100				999900	
T+		T-		T+		T-
99,9		0,1		99,99		999800,01
P(HIV+ | T+)=	**49,98%**					

Ergebnis: Knapp 50% der testpositiven Probanden sind tatsächlich krank!

2 WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN: MODELLE FÜR DIE MERKMALSVARIATION

Beispiel 2.3: Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bezüglich der Samenform mischerbige Erbse nach Selbstbestäubung einen kantigen Samen ausbildet, ist nach der Mendel'schen Spaltungsregel gleich 1/4; die Wahrscheinlichkeit, dass ein mischerbiger Samen entsteht, ist 1/2. Man generiere die Entwicklung von 6 Samen durch ein Wahrscheinlichkeitsmodell und stelle die Verteilung der Anzahl X der kantigen (Fall a) bzw. mischerbigen Samen (Fall b) tabellarisch und grafisch dar. Ferner berechne man den Mittelwert und die Standardabweichung von X. Wie viele kantige Samen sind in einer Stichprobe von 500 Samen zu erwarten?

Präzisierung: X ist binomialverteilt ($B_{n,p}$-verteilt) mit den Parametern

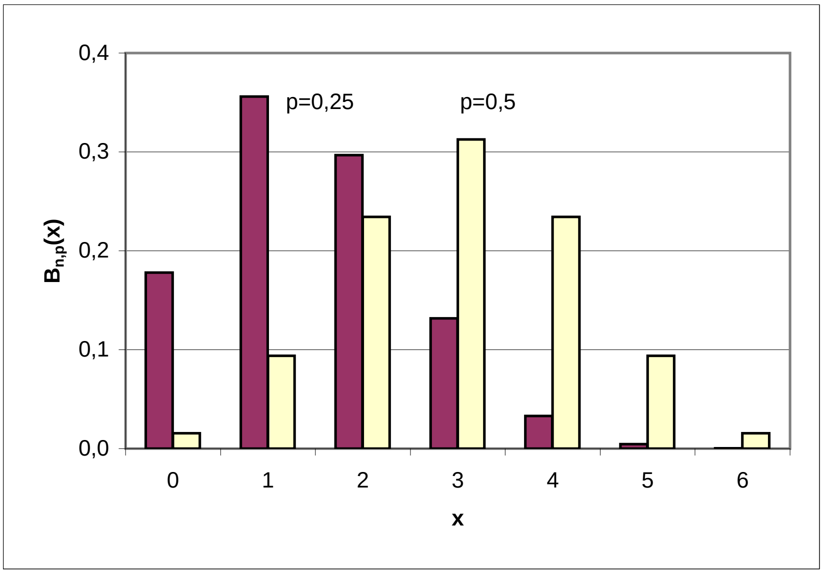
n =	6	und
p =	0,25	(Fall a)
	0,5	(Fall b)

Berechnung: mit Excel-Funktion BINOMVERT(Zahl_Erfolge;Versuche;Erfolgswahrsch;Kumuliert)
Kumuliert=0 ergibt Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion:
P(X = Zahl_Erfolge) = BINOMVERT(Zahl_Erfolge; Versuche; Erfolgswahrsch; 0)
Kumuliert=1 ergibt Werte der kummulatien Wahrscheinlichkeitsfunktion:
P(X $\leq$ Zahl_Erfolge) = BINOMVERT(Zahl_Erfolge; Versuche; Erfolgswahrsch; 1)

Wahrscheinlichkeitsfunktion (Tabelle):

X	Fall a $B_{6,0.25}$	Fall b $B_{6,0.5}$
0	0,1780	0,0156
1	0,3560	0,0938
2	0,2966	0,2344
3	0,1318	0,3125
4	0,0330	0,2344
5	0,0044	0,0938
6	0,0002	0,0156
Summe	1,0000	1,0000

Wahrscheinlichkeitsfunktion (Grafik):



Statistiken:

	Fall a	Fall b
Mitelwert =	1,5	3
Standardabweichung =	1,061	1,225
Erwartungswert (n=500) =	125	250

Beispiel 2.6 und 2.7: Standardnormalverteilung - Dichtekurve, diverse Berechnungen
Es sei Z eine N(0,1)-verteilte Zufallsvariable.

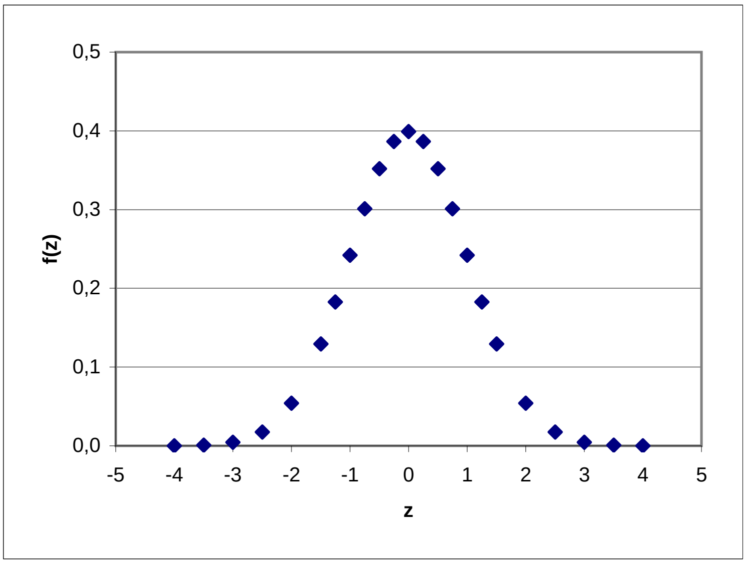
a) Man stelle die Dichtefunktion mit der Gleichung $f(z) = \exp(-z^2/2)/\sqrt{(2\pi)}$ grafisch dar.
b) Man berechne $P(Z>1)$, $P(Z\leq-1)$, $P(0\leq Z\leq 1)$ und $P(-1<Z<1)$.
c) Man berechne das 95%-, 97.5%- und 2.5%-Quantil von Z.

Berechnung: a) Dichtekurve der Standardnormalverteilung

Wertetabelle: Den Wert f(z) der Dichtefunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle z erhält man mit der Excel-Funktion NORMVERT(z;Mittelwert;Standabwn;Kumuliert) mit Mittelwert=0, Standabwn=1 und Kumuliert=0.

Wertetabelle:

z	f(z)
-4,00	0,0001
-3,50	0,0009
-3,00	0,0044
-2,50	0,0175
-2,00	0,0540
-1,50	0,1295
-1,25	0,1826
-1,00	0,2420
-0,75	0,3011
-0,50	0,3521
-0,25	0,3867
0,00	0,3989
0,25	0,3867
0,50	0,3521
0,75	0,3011
1,00	0,2420
1,25	0,1826
1,50	0,1295
2,00	0,0540
2,50	0,0175
3,00	0,0044
3,50	0,0009
4,00	0,0001



b) Berechnungen mit der Verteilungsfunktion

Werte der Verteilungsfunktion $\Phi(z) = P(Z < z)$ der Standardnormalverteilung erhält man mit der Excel Funktion NORMVERT(z;Mittelwert;Standabwn;Kumuliert) mit Mittelwert=0, Standabwn=1 und Kumuliert=1.

$P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1- \Phi(1) =$	0,1587
$P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - \Phi(1)$	0,1587
$P(0 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z < 0) = \Phi(1) - \Phi(0) =$	0,3413
$P(-1 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - [1 - \Phi(1)] = 2\Phi(1) - 1 =$	0,6827

c) Berechnung von Quantilen

Das p-Quantil ist die Lösung z_p der Gleichung $P(Z \leq z_p) = p$ $(0<p<1)$. Mit der Excel-Funktion NORMINV kann man die Lösung durch z_p =NORMINV(p;Mittelwert;Standabwn) mit Mittelwert=0 und Standabwn=1 darstellen.

95%-Quantil $z_{0.95}$ = NORMINV(0,95;0;1) =	1,645
97,5%-Quantil $z_{0.975}$ = NORMINV(0,975;0;1) =	1,960
2,5%-Quantil $z_{0.025}$ = NORMINV(0,025;0;1) =	-1,960

Beispiel 2.8: Allgemeine Normalverteilung

Es sei $X \sim N(m,\ s^2)$ mit $m = 15$ und $s^2 = 16$. Man berechne

a) $P(X < 10)$, $P(X > 10)$, $P(10 \le X \le 20)$ sowie

b) das 95%-Quantil.

Berechnung: a) Berechnungen mit der Normalverteilungsfunktion

Werte $F(x) = P(X < x)$ der Normalverteilungsfunktion gewinnt man mit der EXCEL-Funktion NORMVERT(x;Mittelwert;Standabwn;Kumuliert) mit Kumuliert=1.

$P(X < 10) = F(10) =$	0,1056
$P(X > 10) = 1 - P(X \le 10) = 1 - P(X < 10) = 1\text{-}F(10) =$	0,8944
$P(10 < X < 20) = F(20) - F(10) =$	0,7887

b) Berechnung des 95%-Quantils $x_{0.95}$

Mit der EXCEL-Funktion NORMINV kann das p-Quantil ($0<p<1$) direkt aus x_p = NORMINV(p;Mittewert;Standabwn) bestimmt werden.

$x_{0.95}$ = NORMINV(0,95;15;4) =	21,58

3 PARAMETERSCHÄTZUNG: GENAUIGKEIT UND SICHERHEIT

Beispiel 3.1, 3.3 und 3.5a: Eindimensionale Datenbeschreibung (diskretes Merkmal)
An 40 Exemplaren einer Pflanze (Biscutella laevigata) wurde die Anzahl X der Zähne des größten Grundblattes bestimmt. Man stelle die Merkmalsvariation durch eine Häufigkeitsverteilung (tabellarisch und grafisch) dar und berechne den Mittelwert, die Standardabweichung, den Median und die Quartile.

Daten:
(Stichprobe von X)

1	0	2	0	3
0	4	1	4	6
3	0	3	3	2
3	2	3	1	3
2	5	2	3	4
2	3	2	5	4
2	3	0	2	4
2	3	3	3	4

Gesucht: Häufigkeitstabelle, Histogramm, Mittelwert, Standardabweichung, Median und Quartile, Schiefe

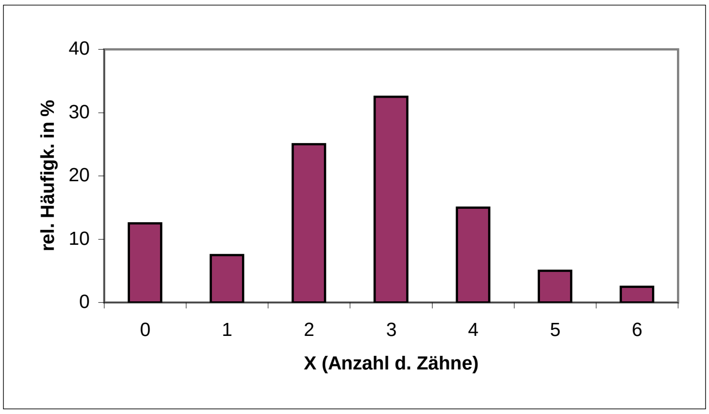
Berechnung: a) Bestimmung der Häufigkeitstabelle (ohne Klassenbildung) mit der Excel-Funktion HÄUFIGKEIT

Schritt 1: Mögliche Werte von X in einer Spalte anordnen (=Klassenbereich)
min = MIN(Bereich) = 0 (Bereich = Stichprobe)
max = MAX(Bereich) = 6

Schritt 2: Absolute Häufigkeiten mit der Matrix-Funktion HÄUFIGKEIT(Datenbereich;Klassenbereich) bestimmen. Vor Eingabe der Formel ist der Ausgabebereich zu markieren; die eingegebene Formel mit SHIFT+CNTRL+ENTER abschließen.

X	abs. Häufigk.	rel.Häufigk.(%)
0	5	12,5
1	3	7,5
2	10	25,0
3	13	32,5
4	6	15,0
5	2	5,0
6	1	2,5
Summe	40	100,0

b) Grafische Darstellung der Merkmalsvariation



c) univariate Statistiken

Mittelwert = MITTELWERT(Bereich) = 2,55
Standardabweichung = STABW(Bereich) = 1,45
Median = MEDIAN(Bereich) = 3,00
unteres Quartil = QUANTIL(Bereich;0,25) = 2,00
oberes Quartil = QUANTIL(Bereich;0,75) = 3,00
Schiefe = SCHIEFE(Bereich) = -0,0514
(Bereich = Stichprobe)

Beispiel 3.2, 3.4a und 3.5b: Eindimensionale Datenbeschreibung (stetiges Merkmal)
Die folgenden Daten enthalten die Blutgerinnungszeiten (in s) von 30 Probanden. Man beschreibe die Verteilung des Merkmals X = Blutgerinnungszeit
a) durch eine Häufigkeitstabelle mit geeignet festgelegten Klassen,
b) durch ein Histogramm und
c) durch Kennzahlen (Mittelwert, Standardabweichung, Media, Quartile, Schiefe).

Daten:
(Stichprobe von X)

22,7	24,0	24,4	25,8	25,9	26,0
26,4	26,6	26,6	26,8	27,0	27,7
27,8	28,0	28,0	28,1	28,7	28,7
28,8	29,0	29,0	29,0	30,0	30,1
31,1	31,8	32,0	33,0	33,7	35,0

Gesucht: Häufigkeitstabelle, Histogramm, Median und Quartile, Schiefe

Berechnung: a) Bestimmung der Häufigkeitstabelle (mit Klassenbildung) mit der Excel-Funktion HÄUFIGKEIT

Schritt 1: Bestimmung der Klassenteilung

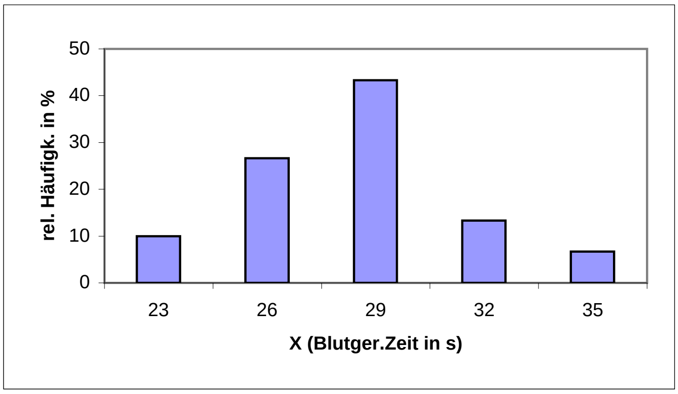
n = ANZAHL(Bereich) =	30	
min = MIN(Bereich) =	22,7	
max = MAX(Bereich) =	35,0	
Anzahl k d. Klassen = approx. √(n) =	5,48	(=) 5 approx.
Klassenbreite = (max - min)/k =	2,46	(=) 3 approx.
untere Grenze der 1. Klasse =	21,5	
obere Grenze der 1. Klasse =	24,5	
obere Grenze der 2. Klasse =	27,5	

usw.

Schritt 2: Bestimmung der absoluten Klassenhäufigkeiten mit der Excel-Funktion HÄUFIGKEIT. Die Funktion HÄUFIGKEIT(Datenbereich; Klassenbereich) ist eine Matrix-Funktion; vor Eingabe der Formel ist der Ausgabebereich zu markieren, die eingegebene Formel mit SHIFT+CNTRL+ENTER abschließen.

ob.Klassengr. bis <=	Klassen-mitten	abs. Klass. Häufigk.	rel. Klass. Häufigk.in %
24,5	23	3	10,0
27,5	26	8	26,7
30,5	29	13	43,3
33,5	32	4	13,3
36,5	35	2	6,7
Summe		30	100,0

b) Grafische Darstellung der Häufigkeitsverteilung (Histogramm)



c) univariate Statistiken

Mittelwert = MITTELWERT(Bereich) = (Bereich = Stichprobe)	28,39
Standardabweichung = STABW(Bereich) =	2,84
Median = MEDIAN(Bereich) =	28,05
unteres Quartil = QUANTIL(Bereich;0,25) =	26,60
oberes Quartil = QUANTIL(Bereich;0,75) =	29,75 *)
Schiefe = SCHIEFE(Bereich) =	0,398

*) Excel verwendet eine kompliziertere Methode der Quantilsberechung als die in der Vorlesung verwendete. Letztere liefert für das 75%-Quantil den Wert 30.

Beispiel 3.4b: Einfache Ausreißerüberprüfung

Man zeige: Für ein N(m, σ^2)-verteilte Zufallsvariable X ist $P(x_{0.25} - 1.5\,IQR < X < x_{0.75} + 1.5\,IQR) = 99{,}3\%$, d.h. jenseits der "Whisker-Enden" liegende Werte sind unwahrscheinlich und daher "ausreißerverdächtig".

Berechnung: X ist normalverteilt mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ.

Das p-Quantil x_p von X ist die Lösung der Gleichung $P(X < x_p) = P((X - \mu)/\sigma < (x_p - \mu)/\sigma) = p \Rightarrow$

$z_p = (x_p - \mu)/\sigma$ ist das p-Quantil der standardnormalverteilten Zufallvariablen $Z=(X - \mu)/\sigma$.

Es folgt:

$x_{0.75} = z_{0,75}\,\sigma + \mu$

$x_{0.25} = z_{0,25}\,\sigma + \mu = -z_{0,75}\,\sigma + \mu$ [wegen $z_{0,75} = -z_{0,25}$]

IQR (Interquartilabstand) = $x_{0,75} - x_{0,25} = 2\,z_{0,75}\,\sigma$

$P(x_{0.25} - 1.5\,IQR < X < x_{0.75} + 1.5\,IQR) = P(-4z_{0,75} < Z < 4z_{0,75}) =$

$\Phi(4\,z_{0,75}) - \Phi(-4\,z_{0,75}) =$ 0,9930

wegen $z_{0,75}$ = NORMINV(0,75;0;1) = 0,6745

Beispiel 3.9: Konfidenzintervall für die Standardabweichung

Es sei X normalverteilt mit dem Mittelwert m und der Varianz s^2. Von einer Stichprobe sei bekannt: n =30, s^2 = 7.93. Man bestimme ein 95%iges Konfidenzintervall für σ.

Gegeben:

Stichprobenumfang n =	30
Stichprobenvarianz s^2 =	7,93
Stichproben-STD s =	2,816
Sicherheit 1-α =	0,95
Irrtumswahrsch. α =	0,05

Berechnung: (1 - α/2) -Quantil der χ^2-Verteilung mit f = n - 1 Freiheitsgraden

= CHIINV(Wahrsch;Freiheitsgrade) = 45,72

[Wahrsch=α/2 (!), Freiheitsgrade=n-1]

α/2 -Quantil der χ^2-Verteilung mit f = n - 1 Freiheitsgraden

= CHIINV(Wahrsch;Freiheitsgrade) = 16,05

[Wahrsch=1-α/2 (!), Freiheitsgrade=n-1]

95%-Konfidienzintervall für σ^2:

Untere Grenze =	5,030
Obere Grenze =	14,331

95%-Konfidienzintervall für σ:

Untere Grenze =	2,243
Obere Grenze =	3,786

Beispiel 3.10: Konfidenzintervall für den Mitelwert

Es sei *X* normalverteilt mit dem Mittelwert m und der Varianz s^2. Für den Mittelwert und die Standardabweichung von X wurden mit Hilfe einer Stichprobe vom Umfang *n* =20 die Schätzwerte 25 bzw. 5 bestimmt. Man bestimme zum Niveau $1-a$ =0.95 ein Konfidenzintervall für den Mittelwert von X.

Präzisierung: X ist normalverteilt mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ
Schätzung von μ und σ aus gegebenen Stichproben

Gesucht: 95%iges Konfidenzintervall für μ

Lösungsmethoden:

i) Approximation für große Stichproben
Berechnung mit KONFIDENZ(Alpha;Standabwn;Umfang_S) mit

Alpha =	0,05	
Standabwn =	5	(=s)
Umfang_S =	20	(= n)
Stichprobemittelwert =	25	

Untere Grenze = Stichprobenmittel - KONFIDENZ(Alpha;Standabwn;Umfang_S)
Obere Grenze = Stichprobenmittel + KONFIDENZ(Alpha;Standabwn;Umfang_S)

KONFIDENZ(0,05;5;40) =	2,19
Untere Grenze =	22,81
Obere Grenze =	27,19

Hinweis:
Die Excel-Funktion KONFIDENZ(Alpha;Standabwn;Umfang_S) liefert die halbe Breite des Konfidenzintervalls für den Mittelwert einer N(μ, σ²)-verteilten Zufallsvariablen bei bekanntem σ bzw. asymptotisch für großes n.

ii) Exakte Rechnung
(1 - α/2) -Quantil der t-Verteilung mit f = n - 1 Freiheitsgraden
= TINV(Wahrsch;Freiheitsgrade) = 2,023
[Wahrsch=α (!) und Freiheitsgrade=n-1]
Halbe Intervallbreite = s/WURZEL(n) x TINV(α;n-1)
= s/WURZEL(n) x TINV(α;n-1) = 2,26
Untere Grenze = Stichprobenmittel - halbe Intervallbreite = 22,74
Obere Grenze = Stichprobenmittel + halbe Intervallbreite = 27,26

Beispiel 3.11: Planung des Stichprobenumfangs bei der Mittelwertschätzung

Der Mittelwert m einer N(μ, σ^2)-verteilten Zufallsvariablen X soll mit einer Genauigkeit von ±0.25 und einer Sicherheit von 1-α = 99% bestimmt werden. Von einer Voruntersuchung sei bekannt, dass σ ≤ 1.5 ist.

Präzisierung: X ist nach Voraussetzung N(μ, σ²)-verteilt mit σ ≤ 1,5.

σ =	1,5
Genauigkeit d =	0,25
Sicherheit 1 - α =	0,99

Berechnungen:

Quantil z(1 - α/2) = STANDNORMINV(1 - α/2) =	2,58
Mindeststichprobenumfang n ≥ [σ z(1-α/2)/d]² =	238,86

Hinweis:
Einschlägige Software zu Bestimmung von n
z.B. nQuery Advisor (Statistical Solutions, Cork, Ireland) oder
Internet-Calculators z.B. unter www.stat.ucla.edu

Interpretation: Es muß ein Mindeststichprobenumfang von 239 geplant werden, um den Mittelwert auf ±0.25 genau mit einer Sicherheit von 99% schätzen zu können.

Beispiel 3.12: Schätzung von Wahrscheinlichkeiten

Es soll die Erfolgsrate p einer neuen Behandlungsmethode, also die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer mit der neuen Methode behandelten Person eine Verbesserung eintritt, geschätzt und ein 95%iges Konfidenzintervall für p bestimmt werden. In einer Studie mit n=50 Probanden erwies sich die neue Methode bei m=35 Personen erfolgreich.

Präzisierung: Anzahl n der Probanden = 50
Anzahl m der erfolgreichen Ergebnisse = 35
p = P(erfolgreiche Behandlung)
X (Anzahl der erfolgrewich behandelten Personen) ist binomialverteilt mit den Parametern p und n

Gesucht: i) Schätzwert für p
ii) 95%-Konfidenzintervall für p

Berechnungen: i) Schätzung von p
Anteil h der erfolgr. Zwiebeln=Schätzwert für p = m/n = 0,7

ii) Intervallschätzung
ii.1) Approximatives 95%-Konfidenzintervall für p
Voraussetzungen: n > 20 und 10 ≤ m ≤ n-10

Sicherheit 1 - α = 0,95
>> (1-α/2)-Quantil der N(0,1)-Verteilung =
STANDNORMINV(1-(1-α)/2) = 1,96
Untere Grenze = h - z(1-α/2)√(h(1-h)/n) = 0,5730
Obere Grenze = h + z(1-α/2)√(h(1-h)/n) = 0,8270

ii.2) Exaktes Intervall mit den Pearson-Clopper-Werten
1-α/2 = 0,975
q_1 = α/2-Quantil der F(2m, 2(n-m+1))-Verteil.=
FINV(1- α/2;2m;2(n-m+1)) = 0,5677
q_2 = 1- α/2-Quantil der F(2(m+1), 2(n-m))-Verteil.=
FINV(α/2;2(m+1);2(n-m)) = 1,9161

Hinweis:
FINV(α; Freiheitsgr.1; Freiheitsgr. 2) liefert das (1 - α)-Quantil!

Untere Grenze = m q_1/(n - m + 1 + m q_1) = 0,5539
Obere Grenze = (m +1) q_2/(n - m + (m +1) q_2) = 0,8214

Beispiel 3.13: Planung des Stichprobenumfangs bei der Schätzung von Wahrscheinlichkeiten

Die Keimfähigkeit p von Blumenzwiebeln (d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass ein ausgesetzter Zwiebel keimt) soll in einem Feldversuch mit der Genauigkeit ±0.1 und der Sicherheit 1-α=0.95 geschätzt werden. Welcher Stichprobenumfang ist zu planen?

Präzisierung: Genauigkeit d = 0,1
Sicherheit 1 - α = 0,95

Berechnungen: Normalverteilungsapproximation
Quantil z(1 - α/2) = STANDNORMINV(1 - α/2) = 1,96
Mindeststichprobenumfang n ≥ [z(1-α/2)/(2d)]² = 96,04
Hinweis:
Einschlägige Software zu Bestimmung von n
z.B. nQuery Advisor (Statistical Solutions, Cork, Ireland) oder
Internet-Calculators z.B. unter www.stat.ucla.edu

Interpretation: Es muß ein Mindeststichprobenumfang von 97 geplant werden, um die Wahrscheinlichkeit p auf ±0.1 genau mit einer Sicherheit von 95% schätzen zu können.

4 RISKANTE ENTSCHEIDUNGEN:
EINE EINFÜHRUNG IN DAS TESTEN VON UNTERSCHIEDSHYPOTHESEN

Beispiel 4.3: Vergleich einer Wahrscheinlichkeit mit einem Sollwert - Binomialtest:
Mit einer neuen Behandlungsmethode will man eine Erfolgsrate p (Wahrscheinlichkeit, dass bei einer mit der neuen Methode behandelten Person eine Verbesserung eintritt) von mehr als p_0 =0,7 erreichen. In einer Studie mit 100 Probanden ist die neue Methode bei 75 Personen erfolgreich.
a) Man zeige, dass dieses Ergebnis keine (auf dem 5%-Niveau) signifikante Überschreitung der angestrebten Erfolgswahrscheinlichkeit p_0=0,7anzeigt.
b) Welcher Stichprobenumfang n muss geplant werden, um auf 5%igem Signifikanzniveau eine Überschreitung des Sollwertes p_0=0,7 um die beobachtete Abweichung Δ=(75/100-0,7)=0,05 mit einer Sicherheit von 80% erkennen zu können?

Präzisierung: X = Anzahl der "erfolgreich behandelten" Personen ist $B_{n,p}$- verteilt mit den Parametern

n =	100
p = p_o =	0,7
Realisation von X:	
m =	75
m/n =	0,75
(m/n-p_o) =	0,05 (beobachtete Überschreitung)

a) Test auf signifikante Überschreitung

Hypothesen:
Ho: $p \leq p_o = 0,7$ vs. H1: $p > p_o = 0,7$

Lösungsvariante 1: Normalverteilungsapproximation

Präzisierung:
Voraussetzung: n > 20 und $10 \leq np_o \leq n-10$ ist erfüllt!
Berechnung:
$\mu = np_o$ = 70
$\sigma = \sqrt{[np(1-p_o)]}$ = 4,5826
Z = (X - μ)/σ ist standardnormalverteilt >>
approx. P-Wert = P(Z > (m-μ)/σ)) = 1- P(Z ≤ (m-μ)/σ) =
1- STANDNORMVERT((m-μ)/σ) = 0,1376
Entscheidung:
P-Wert ≥ α = 0,05 >> Ho kann nicht abgelehnt werden!
Hinweis:
Bessere Approximationen erreicht man mit der sog. Stetigkeitskorrektur, nach der der Zahl x das Intervall (x-0,5; x+0,5) entspricht. In der Formel ist demnach m durch m-0,5 zu ersetzen. Dies ergibt:
approx. P-Wert = 1- P(Z ≤ (m-0,5-μ)/σ)) =
1-STANDNORMVERT((m-0,5-μ)/σ) = 0,1631
(mit dieser Approximation arbeitete z.B. SPSS, Version 8)

Lösungsvariante 2: Exakte Rechnung

Berechnung:
P-Wert = $P(X \geq m| n, p=p_o) = 1 - P(X\leq m-1|n, p=p_o)$ =
1 - BINOMVERT(m-1;n;p_o;1) = 0,1631
Entscheidung:
P-Wert ≥ α = 0,05 >> Ho kann nicht abgelehnt werden!

b) Planung des Stichprobenumfangs (Normalverteilungsapproximation):

Vorgaben:

α =	0,05
β =	0,20
Δ =	0,05
p_o =	0,70

Berechnung:
Quantile der Standardnormalverteilung:
z(1 - a) = STANDNORMINV(1 - α) = 1,645
z(1 - β) = STANDNORMINV(1 - β) = 0,842
Abschätzung für n:
$n \geq (1/4\Delta^2)[z(1-\alpha) + z(1-\beta)]^2$ = 618,3
(ohne Stetigkeitskorrektur)

Interpretation:

Es ist - im Rahmen der Approximation - eine Mindeststichprobenumfang n =619 zu planen, um auf 5%igem Testniveau mit dem Binomialtest eine Überschreitung des Sollwertes p_0 = 0,7 um Δ=0,1 mit 80%iger Sicherheit erkennen zu können. Da der in Teilaufgabe a) vorgesehene Stchprobenumfang n = 100 unter dem Mindeststichprobenumfang liegt, kann aus dem nichtsignifikanten Testausgang nicht auf die Gültigkeit von H_0 geschlossen werden!

Hinweis:

Die angewendete Approximation ist recht grob. Eine bessere Approximation liefert die folgende Formel:

$n \geq (1/\Delta^2)[z(1-\alpha)\sqrt{(p_o(1-p_o))} + z(1-\beta)\sqrt{((p_o-\Delta)(1-p_o+\Delta))}]^2 =$ 500,1

Beispiel 4.5: Vergleich eines Mittelwerts mit einem Sollwert - 1-Stichproben t-Test

Die Wirkung eines Präparates auf den systolischen Blutdruck wurde durch Blutdruckmessungen an 6 Probanden vor und nach Gabe des Präparates ermittelt. Es ergaben sich die folgenden Werte für die Blutdruckänderung X (Differenz aus Endwert minus Anfangswert): -12, -5, -15, 10, -10, 5.

a) Man zeige, dass die mittlere Blutdruckänderung (auf dem 5%-Niveau) keine signifikante Abweichung von null anzeigt.

b) Welcher Stichprobenumfang muss geplant werden, um auf 5%igem Signifikanzniveau eine Abweichung vom Sollwert 0 in der Höhe der beobachteten Abweichung Δ des Stichprobenmittelwertes von null mit einer Sicherheit von mindestens 90% erkennen zu können?

a) Test auf signifikante Abweichung:

Präzisierung: Verteilungsvoraussetzung:

X = Blutdruckänderung ist N(μ, σ^2)-verteilt mit $\mu = \mu_o$

Hypothesen:

Ho: $\mu = \mu o$ vs. H1: $\mu \neq \mu o = 0$

Sollwert μ_o= 0

Berechnung: Datenbeschreibung:

	X
	-12
	-5
	-15
	10
	-10
	5
Stichtpobenumfang n =	6
Stichprobenmittelwert m =	-4,50
Standardabweichung s =	9,97

Testgröße:

TG(s) = $(m - \mu_o)/s \sqrt{(n)}$ = -1,11

P-Wert:

P = P(TG < -|TG(s)| | μ=μo) + P(TG > |TG(s)| | m=μ_o) =

TVERT(x;Freiheitsgrade;Seiten) = 0,3195

[x = TG(s), Freiheitsgrade = n - 1, Seiten = 2 (2-seitige Ausläuferfläche)]

Hinweis:

x darf in TVERT(x;Freiheitsgrade;Seiten) nicht negativ sein!

Entscheidung: P-Wert $\geq \alpha$ = 0,05 >> Ho kann nicht abgelehnt werden!

b) Planung des Stichprobenumfangs (Normalverteilungsapproximation):

Vorgaben:

σ = s =	9,97
α-Fehler α =	0,05
Power 1-β =	0,90
Δ=|m - μ_o)| =	4,50

Berechnung: Quantile:

$z(1 - \alpha/2)$ = STANDNORMINV(1 - α/2) = 1,960

$z(1 - \beta)$ = STANDNORMINV(1 - β) = 1,282

Abschätzformel:

$n \geq (\sigma/\Delta)^2 [z(1-\alpha/2) + z(1-\beta)]^2 =$ 51,63

Interpretation:

Es ist - im Rahmen der Approximation - eine Mindeststichprobenumfang n =52 zu planen, um auf 5%igem Testniveau mit dem t-Test eine Abweichung vom Sollwert μ_0 = 0 um $\Delta=|m-\mu_0|=4{,}5$ mit 90%iger Sicherheit erkennen zu können. Da der in Teilaufgabe a) vorgesehene Stchprobenumfang n = 6 unter dem Mindeststichprobenumfang liegt, kann aus dem nichtsignifikanten Testausgang nicht auf die Gültigkeit von H_0 geschlossen werden!

Beispiel 4.6: Prüfung von Anzahlen auf ein vorgegebenes Verhältnis - c^2-Test

Bei einem seiner Kreuzungsversuche mit Erbsen erhielt Mendel 315 runde gelbe Samen, 108 runde grüne, 101 kantige gelbe und 32 kantige grüne. Sprechen die Beobachtungswerte gegen das theoretische Aufspaltungsverhältnis 9 : 3 : 3 : 1 der Phänotypen? (α=5%)

Präzisierung: Modell:

X (Phänotyp) ist eine 4-stufige Zufallsvariable mit den Werten x1 = rund/gelb, x2 = rund/grün, x3 = kantig/gelb, x4 = kantig/grün und der theoretischen Verteilung p_1 = P(X = x1), p_2 = P(X = x2), p_3 = P(X = x3), p_4 = P(X = x4).

Hypothesen:

H0: $p_1 = p_{01}$, $p_2 = p_{02}$, $p_3 = p_{03}$, $p_4 = p_{04}$ vs.

H1: wenigstens ein p_i weicht vom entsprechenden Sollwert ab

Sollwerte (ergeben sich aus dem Aufspaltungsverhältnis):

p_{01} =	9/16 =	0,5625
p_{02} =	3/16 =	0,1875
p_{03} =	3/16 =	0,1875
p_{04} =	1/16 =	0,0625

Berechnung: Beobachtete Häufigkeiten:

Klassen	beob.Häufigk. O	
rund/gelb	315	
rund/grün	108	
kantig/gelb	101	
kantig/grün	32	
	556	= Stichprobenumfang n

Unter H0 erwartete Häufigkeiten (erwartete Häufigkeit = Sollwert x Stichprobenumfang):

Klassen	erwart.Häufigk. E
rund/gelb	312,75
rund/grün	104,25
kantig/gelb	104,25
kantig/grün	34,75
	556

Testgröße:

TG(s) = GF(s) = Σ(O - E)²/E

Klassen	(O-E)²/E	
rund/gelb	0,0162	
rund/grün	0,1349	
kantig/gelb	0,1013	
kantig/grün	0,2176	
	0,4700	= GF(s)

P-Wert:

P = P(GF > GF(s)) = CHIVERT(x;Freiheitsgrade) = 0,9254

[x = GF(s), Freiheitsgrade FG = Anz.d.Klassen - 1]

Hinweis:

CHIVERT(x;Freiheitsgrade) liefert die "Überschreitungswahrscheinlichkeit" P(X > x) (!)

Entscheidung: P-Wert $\geq \alpha$ = 0,05 >> Ho kann nicht abgelehnt werden!

Beispiel 4.7a: Parallelversuch - Mittelwertvergleich mit dem 2-Stichproben t-Test

Die Serumkonzentration im Eisen (in µg/dl) wurde bei 15- bis 18-jährigen Schülerinnen (Variable X1) und Schülern (Variable X2) bestimmt. Der Stichprobenumfang, der Mittelwert und die Standardabweichung sind 20, 81.4, 42.5 (Schülerinnen) bzw. 20, 102.1, 39.1 (Schüler).

a) Unter der Voraussetzung normalverteilter Grundgesamtheiten zeige man, dass der Mittelwert der Schülerinnen sich auf 5%igem Niveau nicht signifikant vom entsprechenden Schülermittelwert unterscheidet.

b) Welcher Umfang der Zufallsstichproben müsste geplant werden, um mit dem Test einen Mittelwertunterschied in der Höhe der beobachteten Mittelwertdifferenz mit 90%iger Sicherheit als signifikant zu erkennen?

a) Test auf signifikante Mittelwertunterschiede:

Präzisierung: Die Variablen X1 (=Serumkonz. bei Schülerinnen) und X2 (=Serumkonz. bei Schülern) sind $N(\mu_1, \sigma_2^2)$- bzw. $N(\mu_2, \sigma_2^2)$-verteilt mit $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
Hypothesen:
Ho: $\mu_1 = \mu_2$ vs. H1: $\mu_1 \neq \mu_2$
Voraussetzung für die Anwendung des 2-Stichproben t-Tests:
Es liegt Varianzhomogenität vor!

Gegeben: Schülerinnenstichprobe:

Stichprobenumfang n_1 =	20
Mittelwert/Serumkonz. m_1 =	81,4
Standardabw./Serumkonz. s_1 =	42,5

Schülerstichprobe:

Stichprobenumfang n_2 =	20
Mittelwert/Serumkonz. m_2 =	102,1
Standardabw./Serumkonz. s_2 =	39,1

Berechung: Gewichtete Varianz:

$s_p^2 = [(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2]/(n_1+n_2-2)$ =	1667,53
$s_p = \sqrt{(s_p^2)}$ =	40,84
Testgröße:	
$TG(s) = (m_1 - m_2)/[s_p\sqrt{(1/n_1 + 1/n_2)}]$ =	-1,60
P-Wert:	
$P = P(TG < -\lvert TG(s)\rvert) + P(TG > \lvert TG(s)\rvert)$ =	
TVERT(x;Freiheitsgrade;Seiten) =	0,1172

[x=|TG(s)|, Freiheitsgrade = $n_t + n_k - 2$ und Seiten = 2]

Entscheidung: P-Wert $\geq \alpha = 0,05$ >>
Ho (Gleichheit der Mittelwerte) kann nicht abgelehnt werden!

b) Planung des Stichprobenumfangs $n = n_1 = n_2$ (Normalverteilungsapproximation):

Gegeben:

α-Fehler α =	0,05
Power $1-\beta$ =	0,90
krit.Abw. $\Delta = \lvert m_1 - m_2\rvert$ =	20,70
$\sigma = s_p$ =	40,84

Berechnung:

$z(1 - \alpha/2)$ = STANDNORMINV$(1 - \alpha/2)$ =	1,960
$z(1 - \beta)$ = STANDNORMINV$(1 - \beta)$ =	1,282
$n \geq 2(\sigma/\Delta)^2\,[z(1-\alpha/2) + z(1-\beta)]^2$ =	81,78

Ergebnis: Der gesuchte Mindeststichprobenumfang ist n = 82. Aus dem nicht-signifikanten Testausgang kann nicht der Schluss gezogen werden, dass H0 (Gleichheit der Mittelwerte) gilt. Planung des Versuchs ist unzureichend!

Beispiel 4.7b: Parallelversuch - Prüfung auf Varianzunterschiede mit dem F-Test

Man überzeuge sich, dass die Daten von Beispiel 4.7a nicht gegen die (im t-Test vorausgesetzte) Varianzhomogenität sprechen (Testniveau a = 5%).

Präzisierung: Die Variablen X1 und X2 werden als $N(\mu_1, \sigma_1^2)$- bzw. $N(\mu_2, \sigma_2^2)$-verteilt angenommen.
Hinweis: Der F-Test ist wenig robust gegenüber Abweichungen von der Normalitätsvoraussetzung!
Hypothesen: Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs. H1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Gegeben: Schülerinnenstichprobe:

Stichprobenumfang n_1 = 20

Standardabw./Serumkonz. s_1 = 42,5

Schülerstichprobe:

Stichprobenumfang n_2 = 20

Standardabw./Serumkonz. s_2 = 39,1

Berechnung: Testgröße:

$TG(s) = s_1^2/s_2^2$ = 1,1815

P-Wert:

P = 2 P(TG>TG(s)) = 2*FVERT(x:FG1; FG2) = 0,7200

[x = TG(s), FG1 = n_1 - 1, FG2 = n_2 - 1]

Entscheidung: P-Wert $\geq \alpha$ = 0,05 >> Ho (Varianzhomogenität) wird beibehalten!

Hinweis:

FVERT(x;Freiheitsgrad1;Freiheitsgrad2) liefert die "Überschreitungswahrscheinlichkeit" P(X > x) (!)

Beispiel 4.8: Parallelversuch - Mittelwertvergleich mit dem Welch-Test

Bei einer Untersuchung der Cd-Belastung von Forellen in einem Fließgewässer wurden an zwei Stellen je fünf Forellen gefangen und der Cd-Gehalt (in mg/g Frischgewicht) bestimmt. Dabei ergaben sich an der Stelle 1 der Mittelwert 0.065 und die Standardabweichung 0.007, an der Stelle 2 der Mittelwert 0.051 und die Standardabweichung 0.002. Kann aus den Angaben auf einen signifikanten (α=5%) Unterschied im mitt-leren Cd-Gehalt der an der Stelle 1 bzw. 2 entnommenen Forellen geschlossen werden?

Präzisierung: Die Variablen X1 (=Cd-Gehalt an Stelle 1) und X2 (=Cd-Gehalt an Stelle 2) sind $N(\mu_1, \sigma_2^2)$- bzw. $N(\mu_2, \sigma_2^2)$-verteilt.

Hypothesen:

Ho: $\mu_1 = \mu_2$ vs. H1: $\mu_1 \neq \mu_2$

Hinweis:

Der Welch-Test setzt keine Varianzhomogenität voraus!

Gegeben: Stelle 1: Stichprobenumfang n_1 = 5

Mittelwert/Cd-Gehalt m_1 = 0,065

Standardabw./Cd-Gehalt s_1 = 0,007

Stelle 2: Stichprobenumfang n_2 = 5

Mittelwert/Cd-Gehalt m_2 = 0,051

Standardabw./Cd-Gehalt s_2 = 0,002

Berechnung: Varianzen/Cd-Gehalt:

Stelle 1: s_1^2 = 0,000049

Stelle 2: s_2^2 = 0,000004

Freiheitsgrade:

$FG = (s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2 / [(s_1^2/n_1)^2/(n_1-1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2-1)]$ = 4,6487

Testgröße:

$TG(s) = (m_1 - m_2)/\sqrt{[}(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2]$ = 4,3001

P-Wert:

P = P(TG < -|TG(s)|) + P(TG > |TG(s)|) =

TVERT(x;Freiheitsgrade;Seiten) = 0,0077 *)

[mit x=|TG(s)|, Freiheitsgrade = FG+0,5 und Seiten = 2]

*) Beachte:

TVERT rundet bei nicht ganzem FG auf die nächstkleinere ganze Zahl ab!

Entscheidung: P-Wert < α = 0,05 $\Rightarrow$ H1 (Mittelwerte sind ungleich!)

Beispiel 4.9: Parallelversuch - Lagevergleich mit dem U-Test

In zwei bestimmten Entfernungen vom Ufer eines Fließgewässers wurden an jeweils 6 Entnahmestellen die folgender Besiedlungsdichten (Makrozoobenthos pro m^2) beobachtet: 1278, 970, 3388, 1086, 2598, 2610 (Entfernung 1) bzw. 1936, 6020, 1047, 1706, 9390, 2543 (Entfernung 2). Man prüfe mit dem U-Test, ob sich die Besiedlungsdichte von der Entfernung 1 zur Entfernung 2 im Mittel signifikant verändert (α=0.05). (nein)

Präzisierung: Modell:
Die Verteilungsfunktionen F1 und F2 von X1 bzw. X2 unterscheiden sich nicht in der Gestalt, sondern nur in der Lage, d.h. der Graph von F2 geht durch Verschiebung um ein bestimmtes Θ in Richtung der positiven horizontalen Achse in den Graph von F1 über. Bei positiven (negativen) Θ ist X1 "im Mittel" größer (kleiner) als X2. Im Falle Θ = 0 sind X1 und X2 "im Mittel" gleich.
Hypothesen: H_0: $\Theta = 0$ vs. H_1: $\Theta \neq 0$

Berechnung: Stucprobenumfänge: n_1 = 6 (Entfernung 1)
n_2 = 6 (Entfernung 2)

Rangskalierung:

X1(Entfern.1)	X2(Entfern.2)	RANG(X1)	RANG(X2)
1278	1936	4	6
970	6020	1	11
3388	1047	10	2
1086	1706	3	5
2598	9390	8	12
2610	2543	9	7
	Rangsummen r1 bzw. r2 =	35	43

Hinweis:

RANG(X1) und RANG(X2) sind die mit Hilfe der Excel-Funktion RANG(x, Bereich;1) bestimmten Ränge der Werte der X1- bzw. X2-Stichprobe (=Platznummern der nach aufsteigender Größe angeordeneten Elemente beider Stichproben; wenn mehrere Excel-Ränge übereinstimmen, müssen diese Ränge händisch durch den Mittelwert der entsprechenden Platznummern ersetzt werden.)

Testgröße:
TG(s) = U = $n_1 n_2 + n_1(n_1+1)/2 - r_1$ = 22
[n_1, n_2 = Umfänge der X1- bzw. X2-Stichprobe; r_1=Rangsumme in der X1-Stichprobe]

Entscheidung: H_0 auf Niveau α = 0.05 ablehnen, wenn $TG_{(s)} \leq U_{n1,n2,\ 0.025}$ oder $TG_{(s)} \geq U_{n1,n2,0.975}$ ist
wegen n_1=n_2=6, $U_{6,6,\ 0.025}$ = 5 und $U_{6,6,0.975}=n_1 n_2-U_{6,6,0.025}$ = 36-5=31 >>
H_0 kann nicht abgelehnt werden!
Hinweis:
Normalverteilungsapproximation für n_1>20 oder n_2>20 gerechtfertigt >>
TG = $[U - n_1 n_2]/\sqrt{(n_1 n2(n_1+n_2+1)/12)}$ unter H_0 approx. N(0,1)-verteilt

Beispiel 4.10: Paarvergleich - Mittelwertvergleich mit dem t-Test für abhängige Stichprober

Ein einfaches Maß für die Wirkung eines Präparates auf ein Untersuchungsmerkmal ist die Differenz aus dem Merkmalswert nach und vor der Gabe des Präparates. Es soll festgestellt werden, ob ein Testpräparat A im Mittel eine größere Wirkung zeigt als ein Kontrollpräparat B (α=5%). Die Studie wird als Paarvergleich so geplant, dass 8 Probanden zuerst mit dem Kontrollpräparat und dann (nach einer angemessenen Zeitdauer zur Vermeidung von Übertragungseffekten) mit dem Testpräparat behandelt werden.

Daten:

Proband	Wirkung W_B Präparat B	Wirkung W_A Präparat A		$D=W_A - W_B$
1	13,2	14,0		0,8
2	8,2	9,8		1,6
3	10,9	11,2		0,3
4	9,3	14,2	>> Differenzstichprobe >>	4,9
5	10,7	10,6		-0,1
6	6,6	10,4		3,8
7	9,5	9,8		0,3
8	8,8	10,3		1,5

Statistiken der Differenzstichprobe (Bereich = Differenzstichprobe):

Stichpr.umfang n = ANZAHL(Bereich) =	8
Mittelwert=m_D=MITTELWERT(Bereich) =	1,64
Standardabweich. s=STABW(Bereich) =	1,798

Präzisierung: Die Testvariable wird als Differenz $D = W_A - W_B$ Wirkungen von A und B dargestellt. Damit ergibt sich ein 1-Stichprobenproblem mit der Differenz D als Zielvariable. Diese wird als $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt angenommen.
Hypothesen: H0: $\mu = \mu_o = 0$ vs. H1: $\mu \neq \mu_o = 0$

Berechnung: Testgröße:
$TG(s) = [(m_D - \mu_o)/s]\sqrt{n}$ = 2,5754
P-Wert:
P = 2 P(TG < |TG(s)|) = TVERT(x;Freiheitsgrade;Seiten) = 0,03672
[x=TG(s), Freiheitsgrade=n-1, Seiten=2 (2-seitige Ausläuferfläche)]
Hinweis:
x darf in TVERT(x;Freiheitsgrade;Seiten) nicht negativ sein!

Entscheidung: P-Wert < α = 0,05 >> H1, d.h., die mittleren Präparatwirkungen unterscheiden sich!

Beispiel 4.11 Paarvergleich - Medianvergleich mit dem Wilcoxon-Test für abhängige Stichprober
Acht Probanden unterziehen sich einem Kurs zur Erhöhung der Lesegeschwindigkeit. Die Lesegeschwindigkeit (in Wörtern pro Minute) vor und nach dem Kurs (wir bezeichnen sie mit X1 bzw. X2) ist der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen. Hat das Training zu einer signifikanten (α=5%) Erhöhung der Lesegeschwindigkeit geführt?

Daten:

Proband	X1 (v. Kurs)	X2 (n. Kurs)
1	195	216
2	255	255
3	296	370
4	317	365
5	412	505
6	355	350
7	466	485
8	182	275

Datenaufbereitung: Untersuchungseinheiten mit gleichen Merkmalswerten eliminieren (Proband 2 fällt weg, dadurch verringert sich der Stichprobenumfang auf n=7); Paardifferenzen D = X1 - X2 und deren Absolutbeträge |D| bestimmen; Absolutbeträge nach aufsteigender Größe durchnummerieren; Nummern werden den Absolutbeträgen als Rangzahlen zugewiesen (Rangskalierung); die Rangskalierung der |D|-Werte erfolgt mit Hilfe der Excel-Funktion RANG(x; Bereich; 1); gleiche Rangzahlen werden händisch so nachkorrigiert, dass sie durch den Mittelwert der entsprechenden Rangpositionen ersetzt werden.

Excel-Funktion RANG(Zahl; Bezug; Reihenfolge) mit
Zahl = Element, dessen Rang bestimmt werden soll
Bezug = Liste, in der der Rang zu bestimmen ist
Reihenfolge = 0 oder ≠ 0 für absteigende bzw. steigende Rangfolge

Proband	D=X1 - X2	|D|	RANG(|D|)	Rangreihe	D>0
1	-21,0	21,0	3	3	FALSCH
3	-74,0	74,0	5	5	FALSCH
4	-48,0	48,0	4	4	FALSCH
5	-93,0	93,0	6	6	FALSCH
6	5,0	5,0	1	1	1
7	-19,0	19,0	2	2	FALSCH
8	-93,0	93,0	6	6	FALSCH
		$t^+ = \Sigma$ der Ränge zu pos. Paardifferenzen =			1

Modell: Der Effekt wird als Differenz D des Beginn- und des Endwertes dargestellt. Damit ergibt sich ein 1-Stichprobenproblem mit der Differenz D als Zielvariable. D wird als stetig und symmetrisch um den Median ζ verteilt angenommen.
Hypothesen: H_0: $\zeta \geq 0$ vs. H_1: $\zeta < 0$

Berechnung: Testgröße:
$TG = T^+$ = Summe der Ränge zu positiven Paardifferenzen D
unter H_0: E[TG] = n(n+1)/4, Var[TG] = n(n+1)(2n+1)/24

Entscheidung (exakt):

H_0 auf Niveau α = 5% ablehnen, wenn t^+ (=Realisierung von T^+) <= $w_{n,\,0.05}$ ist.
Wegen n = 7 und $w_{7,\,0.05}$ = 3 ist H0 abzulehnen.

Hinweis: Normalverteilungsapproximation für n>20 gerechtfertigt >>
$TG = [T^+ - n(n+1)/4]/\sqrt{(n(n+1)(2n+1)/12)}$ unter H_0 approx. N(0,1)-verteilt!

Beispiel 4.12: Parallelversuch - Vergleich zweier Wahrscheinlichkeiten

Es ist zu untersuchen, ob die Düngungsart (Mineral- bzw. Tresterkompostdüngung) einen Einfluss auf den Pilzbefall (Falscher Mehltau) von Weinstöcken (*Vitis vinifera*) hat. Dazu werden 39 mineralgedüngte Weinstöcke beobachtet, und es wird dabei festgestellt, dass 6 Fällen ein starker Befall zu verzeichnen ist, in den restlichen 33 Fällen nur ein schwacher bzw. überhaupt keiner. Parallel dazu werden 39 tresterkompostgedüngte Weinstöcke untersucht mit dem Ergebnis, dass in 23 Fällen ein starker Befall und in 16 Fällen ein schwacher bis nicht erkennbarer Befall vorhanden war.
a) Gibt es hinsichtlich des Pilzbefalls einen signifikanten Unterschied zwischen den Behandlungsgruppen (α = 0.05)?
b) Ist die Fallzahl in den Gruppen richtig geplant, um mit dem Test eine Differenz der Befallrisken von Δ = 0.25 mit einer Sicherheit von 90% erkennen zu können?

Daten, Datenaufbereitung:

U-Merkm. X_1	Düngungsart X_2		Summe
Befall	Mineral	Trester	
stark	6	23	29
	$=n_{11}$	$=n_{12}$	$= n_{1.}$
schwach	33	16	49
	$=n_{21}$	$=n_{22}$	$= n_{2.}$
Summe	39	39	78
	$= n_{.1}$	$= n_{.2}$	$= n_{..}$

a) Test auf signifikanten Unterschied

Präzisierung: Die Werte a_1 (starker Befall) und a_2 (schwacher Befall) des Untersuchungsmerkmals "Befall" sind Realisationen einer Zweipunktvariablen mit dem Parameter
$p_1=P(X_1=a_1|X_2=\text{Mineraldüngung})$ in der ersten Stichprobe und dem Parameter
$p_2=P(X1=a1|X_2=\text{Tresterkompostdüngung})$ in der zweiten Stichprobe.
Hypothesen:
H_o: $p_1 = p_2$ vs. H_1: $p_1 \neq p_2$

Berechnung: Normalverteilungsapproximation bei großen Stichproben

Voraussetzungen:			
	$n_{..}$ =	78	> 60
	$n_{1.}n_{.1}/n_{..}$=	14,5	> 5
	$n_{1.}n_{.2}/n_{..}$=	24,5	> 5
	$n_{2.}n_{.2}/n_{..}$=	14,5	> 5
	$n_{2.}n_{.1}/n_{..}$=	24,5	> 5

Testgröße:
$TG(s) = \sqrt{(n_{..})}(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})/\sqrt{(n_{.1}n_{.2}n_{1.}n_{2.})}$ = -3,983
P-Wert:
P = P(TG < -|TG(s)|) + P(TG > |TG(s)|) =
STANDNORMVERT(-|TG(s)|)+1-STANDNORMVERT(|TG(s)|) = 0,000068

Entscheidung: P-Wert < α = 0,05 >> H1 (Befallswahrscheinlichkeiten unterscheiden sich!)

b) Planung des Stichprobenumfangs (Normalverteilungsapproximation):

Vorgaben:
$\alpha =$ 0,05
$1-\beta =$ 0,90
$\Delta =$ 0,25

Berechnung:
Quantile der Standardnormalverteilung:
z(1 - a/2) = STANDNORMINV(1 - α/2) = 1,960
z(1 - β) = STANDNORMINV(1 - β) = 1,282
Abschätzung für $n = n_{.1} = n_{.2}$:
$n \geq (1/2\Delta^2)[z(1-\alpha/2) + z(1-\beta)]^2$ = 84,06

Interpretation:
Es ist - im Rahmen der Approximation - eine Mindeststichprobenumfang n =85 zu planen, um auf 5%igem Testniveau einen Unterschied zwischen den Befallwahrscheinlichkeiten in der Höhe von Δ=0,25 mit 90%iger Sicherheit erkennen zu können.

Beispiel 4.13: Änderungsmessung mit dem McNemar-Test
Bei einer Studie wurde u.a. der Blutzucker am Beginn und am Ende einer Behandlung bestimmt. Es ergab sich, dass bei 31 Probanden der Blutzuckerwert am Beginn und am Ende im Normbereich lag, bei 19 Probanden lag der Wert vorher im Normbereich und nachher außerhalb, bei 9 Probanden vorher außerhalb und nachher innerhalb und bei 11 vorher und nachher außerhalb des Normbereichs. Hat sich während der Studie eine signifikante Änderung (α= 5%) hinsichtlich des Anteils der im Normbereich liegenden Werte ergeben?

Daten:

	Ende	
Beginn	im Normb.(+)	außerh. (-)
im Normb.(+)	31 (a)	19 (b)
außerh. (-)	9 (c)	11 (d)

Präzisierung: Jede der b+c Veränderungen wird durch ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (Änderung von + nach - bzw. von - nach +) simuliert. Es finden b+c Wiederholungen statt. Jede Wiederholung führt mit der Wahrscheinlichkeit p_{+-} von + nach -.

b = 19
c = 9

Hypothesen: H_o: p_{+-} = 1/2 vs. H_1: $p_{+-} \neq 1/2$

Berechnung: *Näherungsrechnung (Voraussetzung: b+c>20)*

Testgröße: TG = $(|b - c| -1)^2/(b+c)$
ist näherungsweise Chiquadrat-verteilt mit einem Freiheitsgrad
TG(s) = 2,893

P-Wert:
P = P(GF > GF(s)) = CHIVERT(x;Freiheitsgrade) = 0,08897
(mit x = GF(s) und Freiheitsgrade = 1)

Entscheidung: P-Wert < α = 0,05 >> H1

Beispiel 4.14: Vergleich zweier Häufigkeitsverteilungen - Homogenitätsprüfung mit dem c^2 - Test
In einer Studie wurden Schulkinder im Alter von 6 bis 18 Jahren u.a. aufgefordert, ihr Körpergewicht auf einer 5-stufigen Skala mit den Werten "bin zufrieden", "habe nie nachgedacht", "bin nicht dick, will aber abnehmen", "bin zu dick", "bin zu dünn" zu beurteilen; die Einschätzungen des Körpergewichts sind in der folgenden 5 x 2-Tafel zusammengefasst. Es ist zu prüfen, ob Mädchen und Buben das eigene Körpergewicht verschiedenartig beurteilen (α=5%).

Daten: beobachtete Häufigk. (O)

Beurteilung	Mädchen (A)	Knaben (B)	Σ (Zeilen)
zufrieden	147	219	366
nie nachged.	16	39	55
will abnehm.	130	58	188
zu dick	78	42	120
zu dünn	19	32	51
Σ (Spalten)	390	390	780
			Σ (Gesamt)

Präzisierung: Es seien p_{iA} und p_{iB} die Wahrscheinlichkeiten, dass Mädchen bzw. Knaben die Beurteilung i (i = zufrieden, nie nachgedacht, will abnehmen, zu dick, zu dünn) vornehmen. Die Beurteilung hängt nicht vom Geschlecht ab, wenn $p_{iA} = p_{iB}$ für alle i gilt. Die Abhängigkeit der Beurteilung vom Geschlecht ist auf dem vorgegebenen Testniveau α nachgewiesen, wenn die Nullhypothese H0: $p_{iA} = p_{iB}$ abgelehnt werden kann.

Berechnung: Testgröße: Chiquadratsumme GF = $\Sigma(O - E)^2/E$
Die Summe erstreckt sich über alle A- und B-Zellen; O und E sind die beobachteten bzw. die unter H0 erwarteten Zellenhäufigkeiten (E = Zeilensumme x Spaltensumme/Gesamtsumme). GF ist unter Ho näherungsweise chiquadratverteilt mit FG Freiheitsgraden (FG = um 1 verminderte Anzahl der Skalenstufen).
Voraussetzung für die Approximation: alle erwartetn Häufigkeiten≥1und höchstens 20% von ihnen kleiner als 5.

Bestimmung der Realisationen von E:

Beurteilung	A	B
zufrieden	183,0	183,0
nie nachged.	27,5	27,5
will abnehm.	94,0	94,0
zu dick	60,0	60,0
zu dünn	25,5	25,5
Σ (Spalten)	390,0	390,0

Berechnung der Teilsummen $(O-E)^2/E$:

Beurteilung	A	B	
zufrieden	7,1	7,1	
nie nachged.	4,8	4,8	
will abnehm.	13,8	13,8	
zu dick	5,4	5,4	
zu dünn	1,7	1,7	
Σ (Spalten)	32,7	32,7	65,5 =GF(s)

P-Wert:
P = P(GF > GF(s)) = CHIVERT(x;Freiheitsgrade) = 0,0000
[x = GF(s) und Freiheitsgrade = um 1 verminderte Anzahl von Beurteilungsstufen]

Entscheidung: P-Wert < α = 0,05 >> H1 (signifikant verschiedene Beurteilung)

5 KORRELATION UND REGRESSION: INSTRUMENTE ZUR ERFASSUNG DER GEMEINSAMEN VARIATION VON ZUFALLSVARIABLEN

Beispiel 5.1: Produktmomentkorrelation

In einer Studie wurden u.a. die Serumkonzentrationen X und Y der Na- bzw. Cl-Ionen (in mmol/l) in einer Stichprobe von n =15 zufällig ausgewählten Probanden bestimmt. Unter der Annahme, dass X und Y zweidimensional-normalverteilt sind, soll (i) der Verteilungsparameter ρ durch die Produktmomentkorrelation r geschätzt, (ii) ein 95%-Konfidenzintervall für ρ berechnet und (iii) gezeigt werden, dass X und Y voneinander abhängig sind (α = 5%).

Daten:
(bivariate Stichprobe)

	lfd. Nr.	X	Y
	1	135,0	99,0
	2	147,0	106,5
	3	148,5	105,5
	4	130,0	94,0
	5	139,0	98,0
	6	129,0	92,0
	7	142,0	97,0
	8	146,0	106,0
	9	131,0	102,5
	10	143,5	98,5
	11	138,5	105,0
	12	145,0	103,0
	13	143,0	101,0
univariate	14	153,0	107,0
Statistiken:	15	149,0	104,0
Stichprobenumfang		15	15
Mittelwert		141,30	101,27
Standardabweichung		7,380	4,682

Berechnung: i) Bestimmung des Schätzwertes r (Produktmomentkorrelation) für ρ

Produktmomentkorrelation r =
KORREL(X-Bereich; Y-Bereich) = 0,7490

ii) Bestimmung eines approximativen 95%igen Konfidenzintervalls für ρ

Methode: Z-Transformation (Voraussetzung: n ≥ 15)

Schritt 1: $r \rightarrow z = f(r) = (1/2)\ln[(1+r)/(1-r)]$ = 0,9706

Schritt 2: α = 0,05

$z_{1-\alpha/2}$ = 1,960

$z_u = f(r) - r/[2(n-1)] - z_{1-\alpha/2}/\sqrt{(n-3)}$ = 0,3780

$z_o = f(r) - r/[2(n-1)] + z_{1-\alpha/2}/\sqrt{(n-3)}$ = 1,5096

Hinweis:
z_u und z_o sind die untere und obere Grenze eines approximativen (1-α)-Konfidenzintervalls für f(ρ) !

Schritt 3: Rücktransformation

$f(\rho) \rightarrow r = [\exp(2f(\rho)) -1]/[\exp(2f(\rho)) +1]$

$z_u \rightarrow \rho_u = [\exp(2z_u) -1]/[\exp(2z_u) +1]$ = 0,3610

$z_o \rightarrow \rho_o = [\exp(2z_o) -1]/[\exp(2z_o) +1]$ = 0,9069

Hinweis:
ρ_u und ρ_o sind die untere und obere Grenze eines approximativen (1-α)-Konfidenzintervalls für ρ !

iii) Abhängigkeitsprüfung

Hypothesen: H0: ρ = 0 vs. H1: ρ ≠ 0

Testgröße:
$TG(s) = r\sqrt{(n-2)}/\sqrt{(1 - r^2)}$ = 4,075

P-Wert:
P = P(TG < -|TG(s)|) + P(TG > |TG(s)|) =
TVERT(x;Freiheitsgrade;Seiten) = = 0,0013
[x=TG(s), Freiheitsgrade = n -2, Seiten = 2]

Entscheidung:
P-Wert < α = 0,05 ⇒ Ho ablehnen (r weicht signifikant von null ab)!

Beispiel 5.3: Rangkorrelationskoeffizient von Spearman - Abhängigkeitsprüfung

Es soll mit den Daten von Beispiel 5.1 der Zusammenhang der Variablen *X* und *Y* mit dem Spearman´schen Rangkorrelationskoeffizienten geschätzt werden. Was ergibt die Abhängigkeitsprüfung auf 5%igem Testniveau?

Daten:

lfd. Nr.	Originalwerte X	Y	Rangskalierte Stichproben Rang (X)	Rang (Y)
1	135,0	99,0	4	6
2	147,0	106,5	12	14
3	148,5	105,5	13	12
4	130,0	94,0	2	2
5	139,0	98,0	6	4
6	129,0	92,0	1	1
7	142,0	97,0	7	3
8	146,0	106,0	11	13
9	131,0	102,5	3	8
10	143,5	98,5	9	5
11	138,5	105,0	5	11
12	145,0	103,0	10	9
13	143,0	101,0	8	7
14	153,0	107,0	15	15
15	149,0	104,0	14	10
n =	15			

Berechnung:

i) Bestimmung des Rangkorrelationskoefffizienten r_s von Spearman

Schritt 1: Rangskalierung der X- und Y-Stichrobe

Bestimmung des Ranges eines Ementes der Stichprobe im Bereich *Bezug* durch *RANG(x; Bezug; Reihenfolge)*; dabei ergibt sich der Rang in der nach aufsteigender (absteigender) Größe geordneten Stichprobe, wenn Reihenfolge ≠ 0 (=0).
Achtung: Treten in der Stichprobe gleiche X- bzw. Y-Werte auf, erhalten diese durch die Excel-Funktion RANG dieselben Rangzahlen. Man spricht von Bindungen, die mit besonderen Methoden zu behandeln sind.

Schritt 2: Berechnung von r_s = Produktmomentkorrelation der rangskalierten Stichproben

rs = KORREL(Rang(X);Rang(Y)) = 0,7714

ii) Abhängigkeitsprüfung (näherungsweise ab n = 15)

Nullhypothese H0:
X und Y variieren unabhängig, d.h. alle Permutationen der Y-Ränge sind zu fest angenommenen X-Rängen gleichwahrscheinlich.

Testgröße:
$TG(s) = r_s \sqrt{(n-2)}/\sqrt{(1-r_s^2)}$ = 4,3711
P-Wert:
P = P(TG < -|TG(s)|) + P(TG > |TG(s)|) =
TVERT(x;Freiheitsgrade;Seiten) = = 0,0008
[x=TG(s), Freiheitsgrade = n -2, Seiten = 2]
Entscheidung:
P-Wert < α = 0,05 ⇒ Ho ablehnen (r_s weicht signifikant von null ab)!

Beispiel 5.4: Abhängigkeit zwischen mehrstufig skalierten Variablen

Die Häufigkeitsdaten in der Tabelle beschreiben die gemeinsame Variation der Merkmale "Augenfarbe" und "Haarfarbe" in einer Stichprobe von 200 Personen. Wie groß sind die bei einer angenommenen Unabhängigkeit zu erwartenden absoluten Häufigkeiten? Ist die Korrelation signifikant von null verschieden? (α = 5%)

Daten: beobachtete Häufigk. (O)

Augenfarbe	Haarfarbe *hell*	*mittel*	*dunkel*	Σ (Zeilen)
blau	16	11	5	32
hell	18	19	10	47
mittel	16	42	20	78
dunkel	6	20	17	43
Σ (Spalten)	56	92	52	200 (=n) Σ (Gesamt)

Kontingenztafel: Anz. k der Zeilen = 4
Anz. m der Spalten = 3

Präzisierung: Es sei p_{ij} = P(X=i und Y=j) die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert i und Y den Wert j aufweist. X und Y variieren voneinander unabhängig, wenn $p_{ij} = p_i\, p_j$ mit p_i = P(X=i) und p_j =P(Y=j) ist. Die Abhängigkeit der Variablen X und Y ist auf dem vorgegebenen Testniveau α nachgewiesen, wenn die Nullhypothese H0: pij = $p_i\, p_j$ (für alle i, j) abgelehnt werden kann.

Berechnung: i) Abhängigkeitsprüfung
Testgröße:
Chiquadratsumme GF = Σ(O - E)²/E
Die Summe erstreckt sich über alle Zellen der Augenfarbe/Haarfarbe-Kombinationen.
O und E sind die beobachteten bzw. die unter H0 erwarteten Zellenhäufigkeiten (E = Zeilensumme x Spaltensumme/Gesamtsumme). GF ist unter Ho näherungsweise chiquadratverteilt mit FG Freiheitsgraden (FG = Produkt der jeweils um 1 verminderten Anzahlen der Skalenstufen von X und Y). Voraussetzung für die Approximation: alle erwarteten Häufigkeiten ≥ 1und höchstens 20% von ihnen kleiner als 5.

Bestimmung der Realisationen von E:

	Haarfarbe		
Augenfarbe	*hell*	*mittel*	*dunkel*
blau	8,96	14,72	8,32
hell	13,16	21,62	12,22
mittel	21,84	35,88	20,28
dunkel	12,04	19,78	11,18

Bestimmung der Realisation von GF:

	Haarfarbe				
Augenfarbe	*hell*	*mittel*	*dunkel*	Summe	
blau	5,531	0,940	1,325	7,796	
hell	1,780	0,318	0,403	2,501	
mittel	1,562	1,044	0,004	2,609	
dunkel	3,030	0,002	3,030	6,062	
				18,969	=GF(s)

P-Wert:
P = P(GF > GF(s)) = CHIVERT(x;Freiheitsgrade) = 0,41626
[x = GF(s) und Freiheitsgrade = FG)
Entscheidung:
P-Wert < α = 0,05 ⇒ H1 (X und Y sind voneinander abhängig)

ii) Beschreibung der Intensität der Abhängigkeit:
Cramersche Kontingenzindex V:
V = √[GF(s)/n/(min(k,m) -1)] = 0,218
(k = Anz. d. Zeilen, m = Anz. d. Spalten in der Kontingenztafel)

Beispiel 5.5: Vierfeldertafel - F-Koeffizient und Odds-Ratio

In einer Studie wurde untersucht, ob zwischen der Mortalität in der Perinatalperiode (Merkmal Y, Werte ja/nein) und dem Rauchen während der Schwangerschaft (Merkmal X, Werte ja/nein) ein Zusammenhang besteht. Zu diesem Zweck wurden Daten in einer Geburtenstation erhoben. Man berechne und interpretiere den Φ-Koeffizienten und das Odds-Ratio OR.

Daten: beobachtete Häufigk. (O)

	Raucher			
Mortalität	*ja*	*nein*	Σ (Zeilen)	
ja	246	264	510	
nein	8160	10710	18870	
Σ (Spalten)	8406	10974	19380	(=n)
			Σ (Gesamt)	

Präzisierung: Es sei p_{ij} = P(X=i und Y=j) die Wahrscheinlichkeit, dass X den Wert i und Y den Wert j aufweist. X und Y variieren voneinander unabhängig, wenn $p_{ij} = p_i\, p_j$ mit p_i = P(X=i) und p_j =P(Y=j) ist. Die Abhängigkeit der Variablen X und Y ist auf dem vorgegebenen Testniveau α nachgewiesen, wenn die Nullhypothese H0: pij = $p_i\, p_j$ (für alle i, j) abgelehnt werden kann.

Berechnung: i) Abhängigkeitsprüfung
Testgröße:
Chiquadratsumme GF = $\Sigma(O - E)^2/E$
Die Summe erstreckt sich über alle Zellen der Vierfeldertafel.
O und E sind die beobachteten bzw. die unter H0 erwarteten Zellenhäufigkeiten (E = Zeilensumme x Spaltensumme/Gesamtsumme). GF ist unter Ho näherungsweise chiquadratverteilt mit FG = 1 Freiheitsgraden. Voraussetzung für die Approximation: alle erwarteten Häufigkeiten ≥ 1und höchstens 20% von ihnen kleiner als 5.

Bestimmung der Realisationen von E:

Mortalität	Raucher *ja*	Raucher *nein*
ja	221,21	288,79
nein	8184,79	10685,21

Bestimmung der Realisation von GF:

Mortalität	Raucher *ja*	Raucher *nein*	Summe
ja	2,78	2,13	4,91
nein	0,08	0,06	0,13
		GF(s) =	5,04

P-Wert:
P = P(GF > GF(s)) = CHIVERT(x;Freiheitsgrade) = 0,02479
[x = GF(s) und Freiheitsgrade = FG = 1)
Entscheidung:
P-Wert < α = 0,05 ⇒ H1 (X und Y sind voneinander abhängig)

ii) Beschreibung der Intensität der Abhängigkeit:
Phi-Koeffizient:
$\Phi = \sqrt{[GF(s)/n]}$ = 0,016

Odds-Ratio:
OR = [P(Y=ja|X=ja):P(Y=ja|X=nein)]/[P(Y=nein|X=ja):P(Y=nein|X=nein)] = 1,22
[X = Raucher, Y = Mortalität]
Interpretation:
Durch das Rauchen vergrößert sich das Mortalitätsrisiko um den Faktor 1,22 !

Beispiel 5.6: Einfache lineare Regression - Parameterschätzung und Abhängigkeitsprüfung

Mit den Messdaten (Na- und Cl-Ionenkonz. *X* bzw. *Y*) von Beispiel 5.1 sind - nach (i) Überprüfung der Abhängigkeit - zu bestimmen: (ii) die Regressionsgleichung (von *Y* auf *X*), (iii) die mittleren Zielvariablenwerte (einschl. 95%-Konfidenzintervalle).

Daten:
(bivariate Stichprobe)

lfd. Nr.	X	Y	Y(erwartet)	Residuen Res	Res-Quadrat
1	135,0	99,0	98,27	0,73	0,53
2	147,0	106,5	103,98	2,52	6,37
3	148,5	105,5	104,69	0,81	0,66
4	130,0	94,0	95,90	-1,90	3,60
5	139,0	98,0	100,17	-2,17	4,72
6	129,0	92,0	95,42	-3,42	11,71
7	142,0	97,0	101,60	-4,60	21,15
8	146,0	106,0	103,50	2,50	6,25
9	131,0	102,5	96,37	6,13	37,55
10	143,5	98,5	102,31	-3,81	14,53
11	138,5	105,0	99,94	5,06	25,64
12	145,0	103,0	103,02	-0,02	0,00
13	143,0	101,0	102,07	-1,07	1,15
14	153,0	107,0	106,83	0,17	0,03
15	149,0	104,0	104,93	-0,93	0,86

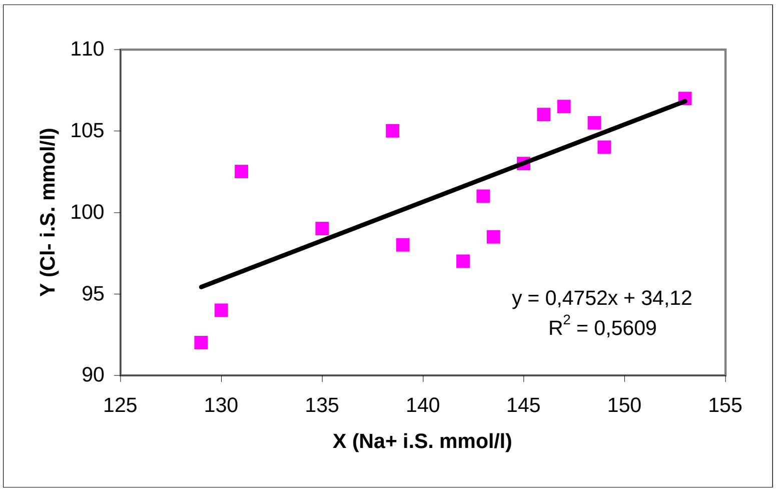
Statistiken:

	X	Y	Y(erwartet)	Residuen Res	Res-Quadrat
Stichprobenumfang	15	15		0,00	134,76
Mittelwert m_X bzw. m_Y	141,30	101,27			
Standardabw. s_X bzw. s_Y	7,380	4,682			
Produktmomentkorr.		0,749			

Y(erwartet): berechnet mit der Regressionsgeraden Y(erwartet) = $b_0 + b_1$ X
Residuen: Res = Y(beobachtet) - Y (erwartet) (Hinweis: Summe muss 0 sein!)
Res-Quadrat: = Res*Res (Hinweis: Summe = SQRes !)

Präzisierung: Es wird angenommen, dass sich die Zielvariable Y additiv aus dem von X abhängigen Funktionsterm f(X) und einem von X unabhängigen, um null normalverteilten Restterm E zusammensetzt. Im linearen Regressionsmodell gilt für den Funktionsterm f(X) der Ansatz: f(X) = $ß_0$+ $ß_1$X mit den Geradenparametern $ß_0$ (Y-Achsenabschnitt) und $ß_1$ (Anstieg). Die Parameter $ß_0$ und $ß_1$ werden aus den Stichprobenwerten durch b_0 bzw. b_1 geschätzt. Y hängt von X ab, wenn der Anstieg $ß_1$ von null abweicht. Die Abhängigkeit ist auf dem vorgegebenen Testniveau erwiesen, wenn die Nullhypothese H0: $ß_1$ = 0 oder die dazu äquivalente Nullhypothese H1: ρ = 0 abgelehnt werden kann.

Vorüberlegung: Überprüfung der Adäquatheit des linearen Modells (grafisch):
Streudiagramm erstellen, Regressionsgerade einfügen:
Datenpunkte mit rechter Maustaste anklicken, Trendlinie hinzufügen …
(Optionen: Formel im Diagramm darstellen)



Verteilung der Punkte imM Streudiagramm zeigt linearen Trend → lineares Regressionsmodell!

Berechnungen: i) Abhängigkeitsprüfung:
Testgröße:
TG(s) = r $\sqrt{}$(n-2)/$\sqrt{}$(1 - r^2) = 4,0753
P-Wert:
P = P(TG < -|TG(s)|) + P(TG > |TG(s)|) =
TVERT(x;Freiheitsgrade;Seiten) = = 0,0013
[x=TG(s), Freiheitsgrade = n-2, Seiten = 2)
Entscheidung:
P-Wert < α = 0,05 ⇒ Ho ablehnen, d.h. Y hängt von X linear ab!

ii) Parameterschätzung:
Schätzung der Geradenparameter:
b_1 = STEIGUNG(Y-Werte; X_Werte) = 0,4752
b_0 = ACHSENABSCHNITT(Y_Werte; X_Werte) = 34,1195
Gleichung der Regressionsgeraden: Y = b_0 + b_1 X

95%-Konfidenzintervall für den Geradenanstieg:

α =	0,05
b_1 =	0,4752
t(n-2,1-α/2)=	2,160
SQRes =	134,765
MQRes = SQRes/(n-2) =	10,36652
s_X^2 =	54,4571
SE(b_1) = √[MQRes/(n-1)/s_X^2] =	0,1166
untere Grenze = b_1 - t(n-2,1-α/2)SE(b_1) =	0,2233
obere Grenze = b_1 + t(n-2,1-α/2)SE(b_1) =	0,7271

iii) 95%-Vorhersagebereich für das mittlere Y

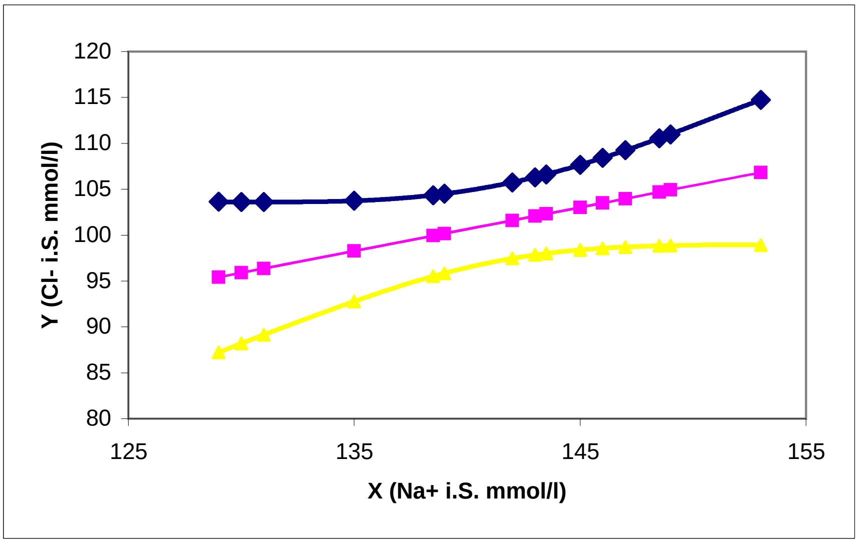
Y(erwartet) = b_0 + b_1 X (an der Stelle X erwartetes Y)

SE[Y(erwartet)] = √[MQRes(1/n + (x-m_X)^2/(n-1)/s_X^2)]

untere Grenze = Y(erwartet) - t(n-2, 1-α/2)SE[Y(erwartet)]

obere Grenze = Y(erwartet) + t(n-2, 1-α/2)SE[Y(erwartet)]

X	Y(erwartet)	SE[Y(erw.)]	untere Gr.	obere Gr.
135,0	98,27	2,5427	92,78	103,77
147,0	103,98	2,4395	98,71	109,25
148,5	104,69	2,7080	98,84	110,54
130,0	95,90	3,5709	88,18	103,61
139,0	100,17	2,0021	95,85	104,50
129,0	95,42	3,7996	87,21	103,63
142,0	101,60	1,9145	97,46	105,74
146,0	103,50	2,2822	98,57	108,43
131,0	96,37	3,3479	89,14	103,60
143,5	102,31	1,9940	98,00	106,62
138,5	99,94	2,0471	95,51	104,36
145,0	103,02	2,1467	98,39	107,66
143,0	102,07	1,9588	97,84	106,31
153,0	106,83	3,6617	98,92	114,74
149,0	104,93	2,8045	98,87	110,98



Beispiel 5.7: Zufallsgestörte lineare Abhängigkeit
Um herauszufinden, wie die Entwicklungsdauer *Y* (in Tagen) von *Gammarus fossarum* von der Wassertemperatur *X* (in ^{o}C) abhängt, wurde ein Laboratoriumsexperiment mit vorgegebenen Temperaturwerten durchgeführt.
i) Man stelle die Abhängigkeit der mittleren Entwicklungsdauer von der Temperatur durch eine Regressionsgerade dar. ii) Ist der geschätzte Geradenanstieg signifikant von null verschieden. iii) Man stelle die Y-Werte auf den Temperaturstufen durch Mittelwerte mit einfachen Streuintervallen dar. (α=5%)?

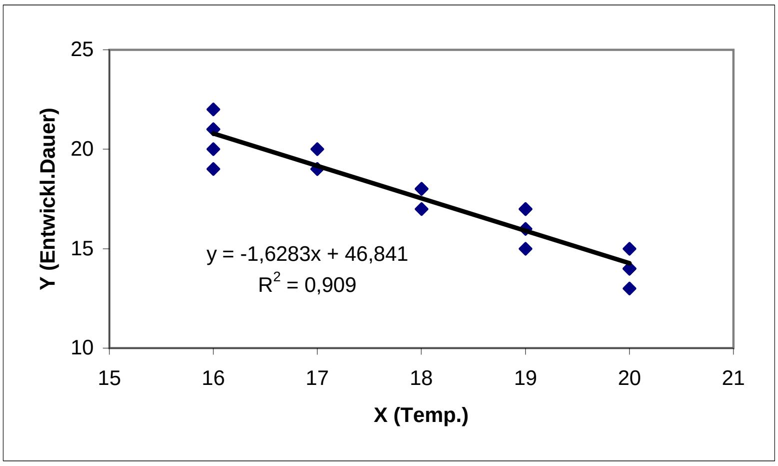
Daten:
(bivariate Stichprobe)

	X	Y	Y(erwartet)	Residuen	Res-Quadrat
	16	22	20,79	1,21	1,47
	16	20	20,79	-0,79	0,62
	16	19	20,79	-1,79	3,20
	16	21	20,79	0,21	0,04
	16	21	20,79	0,21	0,04
	17	19	19,16	-0,16	0,03
	17	20	19,16	0,84	0,71
	17	19	19,16	-0,16	0,03
	18	18	17,53	0,47	0,22
	18	18	17,53	0,47	0,22
	18	17	17,53	-0,53	0,28
	19	17	15,90	1,10	1,20
	19	15	15,90	-0,90	0,82
	19	16	15,90	0,10	0,01
	19	17	15,90	1,10	1,20
	20	14	14,27	-0,27	0,08
	20	14	14,27	-0,27	0,08
	20	14	14,27	-0,27	0,08
	20	15	14,27	0,73	0,53
Statistiken:	20	13	14,27	-1,27	1,63
Stichprobenumfang	20	20		0,00	12,46
Mittelwert m_X bzw. m_Y	18,05	17,45			
Standardabw. s_X bzw. s_Y	1,572	2,685			
Produktmomentkorr.		-0,9534			

Y(erwartet): berechnet mit der Regressionsgeraden Y(erwartet) = $b_0 + b_1$ X
Residuen: Res = Y(beobachtet) - Y (erwartet) (Hinweis: Summe muss 0 sein!)
Res-Quadrat: = Res*Res (Hinweis: Summe = SQRes !)

Präzisierung: siehe Beispiel 5.6

Vorüberlegung: Überprüfung der Adäquatheit des linearen Modells (grafisch):



Verteilung der Punkte im Streudiagramm zeigt linearen Trend --> lineares Regressionsmodell!

Berechnungen: i) Abhängigkeitsprüfung:

Testgröße:

$TG(s) = r\,\sqrt{(n-2)}/\sqrt{(1 - r^2)} =$ -13,4079

P-Wert:

$P = P(TG < -|TG(s)|) + P(TG > |TG(s)|) =$

TVERT(x;Freiheitsgrade;Seiten) = = 0,0000

[x= |TG(s)|, Freiheitsgrade = n-2, Seiten = 2)

Entscheidung:

P-Wert < α = 0,05 $\Rightarrow$ Ho ablehnen, d.h. Y hängt von X linear ab!

ii) Parameterschätzung:

Schätzung der Geradenparameter:

b_1 = STEIGUNG(Y-Werte; X_Werte) = -1,6283

b_0 = ACHSENABSCHNITT(Y_Werte; X_Werte) = 46,8413

Gleichung der Regressionsgeraden: $Y = b_0 + b_1 X$

95%-Konfidenzintervall für den Geradenanstieg:

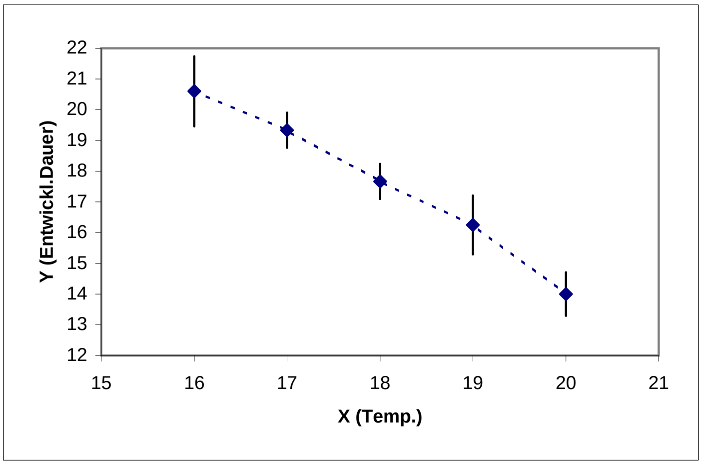
α =	0,05
b_1 =	-1,6283
t(n-2,1-α/2)=	2,101
SQRes =	12,464
MQRes = SQRes/(n-2) =	0,69246
s_X^2 =	2,4711
$SE(b_1) = \sqrt{[MQRes/(n-1)/s_X^2]}$ =	0,1214
untere Grenze = b_1 - t(n-2,1-α/2)SE(b_1) =	-1,8835
obere Grenze = b_1 + t(n-2,1-α/2)SE(b_1) =	-1,3732

iii) Darstellung der Y-Werte auf den Temperaturstufen durch Mittelwerte und Streuintervalle

Temp.Stufe	Anzahl	Y-Mittel	Y-STD (+)	Y-STD (-)
16	5	20,60	1,1402	-1,1402
17	3	19,33	0,5774	-0,5774
18	3	17,67	0,5774	-0,5774
19	4	16,25	0,9574	-0,9574
20	5	14,00	0,7071	-0,7071
Summe	20			

Standardfehlerbalken:

Datenpunkte im Streudiagramm anklicken (rechte Maustaste) -
Datenreihen formatieren - Fehlerindikator Y -
Anzeige:Beide - Fehlerbetrag: Anpassen



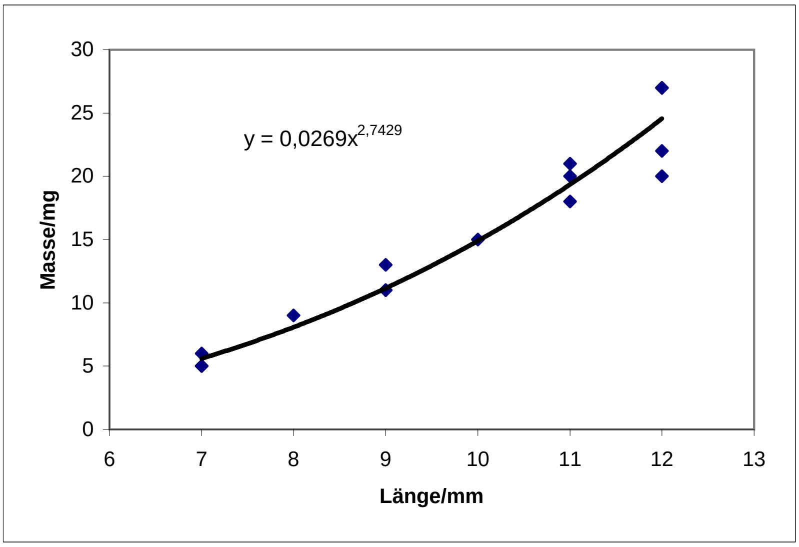
Beispiel 5.8: Linearisierende (log/log-) Transformation
Man stelle die Abhängigkeit der Masse Y' (in mg) von der Länge X' (in mm) an Hand der an 15 Exemplaren von *Gammarus fossarum* gemessenen Werte durch ein geeignetes Regressionsmodell dar.

Daten:
(bivariate Stichprobe)

	X'	Y'	X = ln(X')	Y = ln(Y')
	7	5	1,9459	1,6094
	7	5	1,9459	1,6094
	7	6	1,9459	1,7918
	8	9	2,0794	2,1972
	9	11	2,1972	2,3979
	9	11	2,1972	2,3979
	9	13	2,1972	2,5649
	10	15	2,3026	2,7081
	11	18	2,3979	2,8904
	11	20	2,3979	2,9957
	11	21	2,3979	3,0445
	12	20	2,4849	2,9957
	12	22	2,4849	3,0910
	12	27	2,4849	3,2958
Statistiken:	12	27	2,4849	3,2958
Stichprobenumfang	15	15		
Mittelwert	9,8000	15,3333	2,2630	2,5924
Standardabweichung	1,9346	7,4801	0,2073	0,5779
Produktmomentkorr.				0,9837

Hinweis:
Potenzfunktion (Ergebnis der Vorüberlegung) wird durch log/log-Transformation linearisiert!

Vorüberlegung: Überprüfung der Adäquatheit des linearen Modells (grafisch):
Streudiagramm erstellen → Punkteverteilung zeigt gekrümmten Verlauf -
Datenpunkte mit rechter Maustaste anklicken, Trendlinie hinzufügen …
Typ: Potenziell (Optionen: Formel im Diagramm darstellen)



Lineariserierung der Potenzfunktion durch doppeltlogarithmische Transformation:
X' → X = ln(X'), Y' → Y =ln(Y')

Berechnungen: i) Abhängigkeitsprüfung:
Testgröße:
$TG(s) = r\sqrt{n-2}/\sqrt{1 - r^2} =$ 19,7205
P-Wert:
P = P(TG < -|TG(s)|) + P(TG > |TG(s)|) =
TVERT(x;Freiheitsgrade;Seiten) = = 0,0000
[x= |TG(s)|, Freiheitsgrade = n-2, Seiten = 2)
Entscheidung:
P-Wert < α = 0,05 ⇒ Ho ablehnen, d.h. Y hängt von X linear ab!

ii) Parameterschätzung:

Schätzung der Geradenparameter:

b_1 = STEIGUNG(Y-Werte; X_Werte) = 2,7429

b_0 = ACHSENABSCHNITT(Y_Werte; X_Werte) = -3,6148

Gleichung der Regressionsfunktion:

$Y = b_0 + b_1 X$, d.h. $\ln Y' = b_0 + b_1 \ln X' \rightarrow Y' = b_0' X'^{\,b1}$

mit $b_0' = \exp(b_0)$ = 0,02692

Beispiel 5.9: Regressionsfunktion durch einen festen Punkt

Es sei C die Plasmakonzentration eines Wirkstoffes und c_o der Anfangswert. Die folgenden Daten zeigen die auf den Anfangswert bezogene Wirkstoffkonzentration $Y'=C/c_o$ in Abhängigkeit von der Zeit X. Offensichtlich muss Y'(0)=1 gelten. Unter der Annahme, dass Y' im Mittel nach dem Exponentialgesetz $\mu_{Y'(x)} = \exp(\beta_1 x)$ abnimmt, bestimme man einen Schätzwert (samt 95%igem Konfidenzintervall) für den Parameter β_1.

Daten:

X	Y'	Y = ln(Y')	X*X	X*Y	Y(erwartet)	Res-Quadrat
1	0,72	-0,3285	1	-0,3285	-0,5320	0,04141
2	0,29	-1,2379	4	-2,4757	-1,0640	0,03023
3	0,16	-1,8326	9	-5,4977	-1,5960	0,05596
4	0,11	-2,2073	16	-8,8291	-2,1280	0,00628
5	0,075	-2,5903	25	-12,9513	-2,6600	0,00487
6	0,046	-3,0791	36	-18,4747	-3,1920	0,01275
7	0,025	-3,6889	49	-25,8222	-3,7240	0,00124
8	0,014	-4,2687	64	-34,1496	-4,2560	0,00016
			204	-108,5289		0,15290
			$= \Sigma (x^2)$	$= \Sigma (xy)$		= SQRes

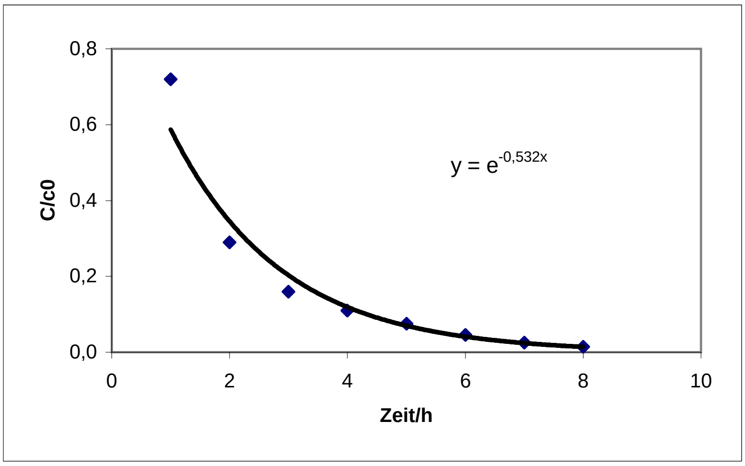
Statistiken:		
Stichprobenumfang =	8	
Mittelwert (X, Y) =	4,5	-2,4041
STD (X, Y) =	2,4495	1,2901

Hinweise:

Exponentialfunktion (Ergebnis der Vorüberlegung) wird durch log-Transformation linearisiert!

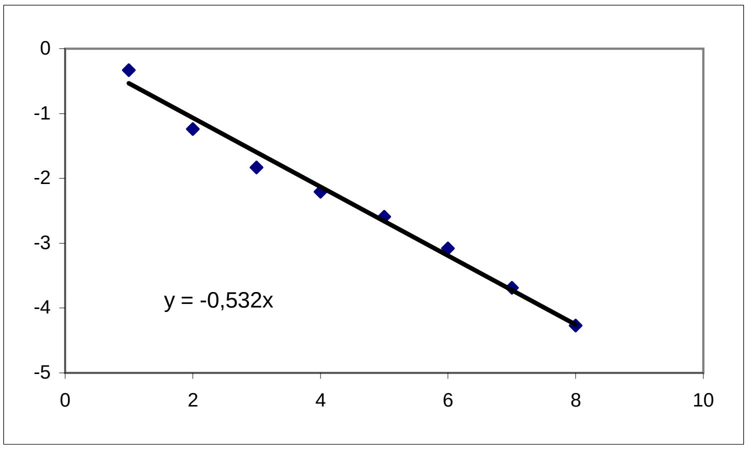
Y(erwartet) = b_1 X, Res-Quadrat = $[Y - Y(\text{erwartet})]^2$

Vorüberlegung: Überprüfung der Adäquatheit des linearen Modells (grafisch):
Streudiagramm erstellen → Punkteverteilung zeigt gekrümmten Verlauf -
Datenpunkte mit rechter Maustaste anklicken, Trendlinie hinzufügen …
Typ: Exponentiall (Optionen: Formel im Diagramm darstellen)



Linearisierung der Exponentialfunktion durch einfach-logarithmische Transformation:
X' → X = X', Y' → Y =ln(Y')

Streudiagramm mit log-transformierten Y'-Werten:



Einzeichnen der Gegressionsgeraden (durch den Nullpunkt):
Datenpunkte mit rechter Maustaste anklicken, Trendlinie hinzufügen …
Typ: Linear (Optionen: Schnittpunkt=0, Formel im Diagramm darstellen)

Berechnungen:	Schätzung des Geradenanstiegs:	
	$b_1 = \Sigma$ (xy) / $\Sigma(x^2)$ =	-0,5320
	Gleichung der Regressionsfunktion:	
	$Y = b_0 + b_1 X$, d.h. $\ln Y' = b_1 X \rightarrow Y' = \exp(b_1 X)$	
	95%-Konfidenzintervall für den Anstieg:	
	SQRes =	0,15290
	MQRes = SQRes/(n-1) =	0,02184
	$SE(b_1)=\sqrt{[MQRes/\Sigma (x^2)]}$ =	0,01035
	α =	0,05
	$t(n-1,1-\alpha/2)$ =	2,365
	halbe Intervallbreite =	0,02447
	untere Grenze = $b_1 - t(n-1,1-\alpha/2)SE(b_1)$ =	-0,5565
	obere Grenze = $b_1 + t(n-1,1-\alpha/2)SE(b_1)$ =	-0,5075
	Abhängigkeitsprüfung:	
	Die null liegt nicht im Konfidenzintervall $\rightarrow \beta_1 \neq 0$, d.h. Y hängt von X ab!	