**ANA, 2019W**

## Übungsaufgaben zur Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

## Blatt 2

7. Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert, indem man zwei geeignete Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n \leq a_n \leq c_n$ finde.

   (a) $a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}$ (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

8. Man finde eine explizite Darstellung für die Partialsummen der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)}$$

   und berechne damit – wenn möglich – die Summe.
   (Hinweis: Man stelle die Summanden als Differenzen passender Ausrücke dar.)

9. Mit Hilfe eines geeigneten Konvergenzkriteriums untersuche man die folgenden Reihen auf Konvergenz:

   (a) $\frac{1}{2^1} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^5} + \ldots$ (b) $\frac{1}{11} + \frac{1}{101} + \frac{1}{1001} + \ldots$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} - \frac{1}{\sqrt{3^2+2}} \pm \ldots$

10. Man berechne mit Hilfe der komplexen Zahlen und unter Verwendung der Moivre'schen Formel $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ den Wert der beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}.$$

11. Für n = 1, 2, 3, ... sei

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad c_n = \frac{1}{n+1}, \quad d_n = \frac{1}{n+2}.$$

   Weiter sei

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \quad D = \sum_{n=1}^{\infty} d_n .$$

   (a) Berechnen Sie die Partialsummen und den Grenzwert von B.

   (b) Warum ist B = C – D falsch, obwohl $b_n = c_n - d_n$ gilt?

   (c) Zeigen Sie, dass $a_n \leq 6b_n$ für $n \geq 1$, und schließen Sie daraus auf die Konvergenz der Reihe A?

12. Was ist an nachstehender Rechnung falsch?

$$
\left.\begin{array}{l}
\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \pm \cdots \\
\frac{1}{2} \ln 2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} \pm \cdots
\end{array}\right\} +
$$

$$
\frac{3}{2} \ln 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \pm \cdots = \ln 2
$$