ANA, 2019W

Übungsaufgaben zur Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Blatt 10

49. (a) Für die Funktion $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ berechne man die partiellen Ableitungen f_x, f_y und die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x_0,y_0) = (0.2, 0.3)$.

    (b) Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktion $f(x,y) = x^2 \sin y + \cos(x + 2y)$.

50. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

    Man zeige, dass im Ursprung (0,0) zwar die partiellen Ableitungen f_x und f_y existieren, die Funktion dort aber nicht stetig ist.

51. Das elektrostatische Potential einer Punktladung Q im Koordinatenursprung ist durch

$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

    gegeben, für das Potential eines Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{p} = (p,0,0)$ gilt

$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

    (Dabei sind Q, p und ε_0 Konstante.) In beiden Fällen berechne man das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}$ nach der Formel $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$.

52. Durch $z = xy/(x + y)$ ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Beschränkung von x und y auf die Werte $x = e^t$ und $y = e^{-t}$ $(t \in \mathbb{R})$ liefert eine Kurve auf dieser Fläche. Man bestimme dz/dt mittels Kettenregel und mache die Probe, indem man zuerst x und y in z einsetzt und anschließend nach dem Parameter t differenziert. Wo verläuft diese Kurve auf der Fläche horizontal?

53. Mit Hilfe der Kettenregel berechne man den Wert der partiellen Ableitung der Funktion $F(x,y) = f(g(x,y),h(x,y))$ nach y an der Stelle (0,0), wobei $f(g,h) = g^2 + h^2$, $g(x,y) = \cos x + \sin y$ und $h(x,y) = x + y + 1$ ist.

54. Man bestimme dy/dx für folgende implizit gegebene Kurven:

    (a) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ für $x_0 = 0{,}5$

    (b) $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ für $x_0 = 1$