ANA, 2019W

Übungsaufgaben zur Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Blatt 1

1. Man finde ein Bildungsgesetz für die unendlichen Folgen:

   (a) 0,3; 0,09; 0,027; ... (b) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \ldots$ (c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$

   Wie groß ist dann jeweils das zwölfte Folgenglied?

2. Man untersuche nachstehende Folgen in Hinblick auf Monotonie, Beschränktheit und mögliche Grenzwerte. Ferner veranschauliche man die Folgen auf der reellen Zahlengeraden:

   (a) $(a_n) = 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots, n, \frac{1}{n+1}, \ldots$

   (b) (b_n) mit $b_n = \frac{n+5}{n-1}$ für $n \geq 2$

   (c) (c_n) mit $c_n = (-1)^n \frac{n+2}{n}$ für $n \geq 1$

3. Gegeben sei die rekursiv definierte Folge (a_n) mit $a_0 = 1$ und

   $$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) \quad \text{für } n = 0,1,2,\ldots .$$

   Man berechne die Folgenglieder a_n für $n = 0,\ldots,10$, untersuche die Folge in Bezug auf Monotonie, Beschränktheit sowie Konvergenz und berechne – wenn möglich – den Grenzwert.

4. Man beweise, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt.

   (Anleitung: Zeigen Sie, dass $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$ eine Nullfolge ist. Dazu entwickle man die Darstellung $(1 + a_n)^n = n$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes und leite daraus die Ungleichung $a_n \leq \sqrt{2/n}$ her.)

5. Zu folgenden konvergenten Zahlenfolgen bestimme man den Grenzwert:

   (a) $x_n = \frac{n^3 - 4n^2 - 4n + 1}{2n^3 + 1}$ (b) $x_n = \sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1}$

6. Seien P_1 und P_2 beliebige Punkte der Zahlengeraden. Man halbiere fortgesetzt die Strecke $\overline{P_1P_2}$ in P_3, die Strecke $\overline{P_2P_3}$ in P_4, $\overline{P_3P_4}$ in P_5, usw. und bestimme die Lage von P_n für $n \to \infty$.